



Ministero dell'istruzione e del merito

H002 - STAATLICHE ABSCHLUSSPRÜFUNG DER OBERSCHULE

Realgymnasium
Realgymnasium mit Schwerpunkt Angewandte Naturwissenschaften

Fach: MATHEMATIK

Lösen Sie eine der beiden Problemstellungen und beantworten Sie vier der acht Fragen.

PROBLEMSTELLUNG 1

Man betrachte $f_{a,b}(x) = \frac{ax^3+b}{x^2}$, mit $a, b \in \mathbb{R}$.

- a) Bestimmen Sie die Werte der Parameter, sodass die Gerade t mit Gleichung $7x + y - 12 = 0$ eine Tangente an den Graphen von $f_{a,b}(x)$ im Punkt P mit Abszissenwert $x = 1$ ist.

Ab hier gilt: $a = 1$ und $b = 4$

- b) Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2}$ und zeichnen Sie den zugehörigen Graphen γ . Stellen Sie die Gleichung der zusätzlichen Tangente an den Graphen von γ auf, die durch den Punkt P geht.
- c) Bestimmen Sie, beim Variieren des reellen Parameters m , die Anzahl der Schnittpunkte zwischen Gerade $y - 5 = m(x - 1)$ und Graphen γ .
- d) Sei $S(k)$, mit $k > \frac{3}{2}$, die begrenzte Fläche, die zwischen dem Graphen γ , seiner schiefen Asymptote, der Geraden t und der Geraden $x = k$ eingeschlossen wird. Bestimmen Sie $\lim_{k \rightarrow +\infty} S(k)$ und geben Sie eine geometrische Interpretation des Ergebnisses an.

PROBLEMSTELLUNG 2

«Zu Beginn und am Ende steht das Mysterium. [...] Die Mathematik nähert sich diesem Mysterium, ohne dieses zu ergründen». (E. De Giorgi)

Man betrachte die folgende Funktionsschar $f_n(x) = \sqrt[n]{x^2} - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$, mit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ und $a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0$.

- a) Zeigen Sie, dass für jeden Wert von n , die Funktion f_n im Abszissenwert $x = 0$ nicht differenzierbar ist. Bestimmen Sie denjenigen Wert n , für den die Funktion f_n einen spitz zulaufenden Punkt aufweist. Für geeignete Werte a, b , beschreibt der Graph α in der Abbildung die Funktion $f_2(x) = |x| - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$. Bestimmen Sie die Parameter a und b , sodass f_2 im Intervall $[-1; 1]$ definiert ist und der Graph symmetrisch zur Ordinate liegt.



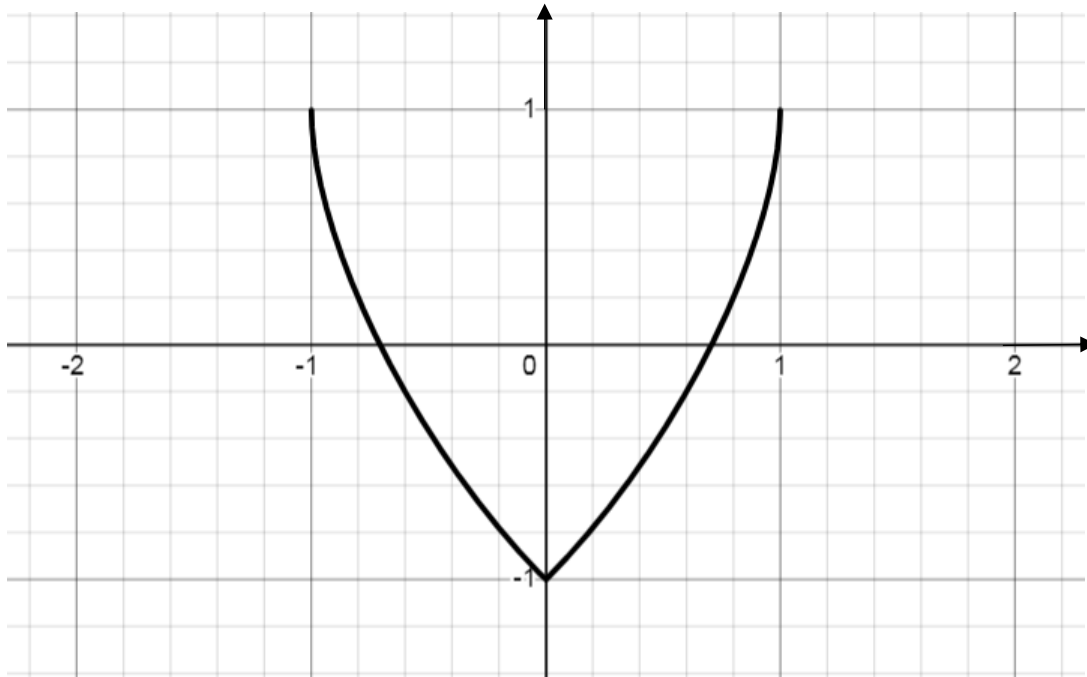
Ministero dell'istruzione e del merito

H002 - STAATLICHE ABSCHLUSSPRÜFUNG DER OBERSCHULE

Realgymnasium

Realgymnasium mit Schwerpunkt Angewandte Naturwissenschaften

Fach: MATHEMATIK



Ab hier gilt: $a = -1$, $b = 0$

- c) Untersuchen Sie die Funktion $g(x) = |x| + \sqrt{1 - x^2}$ und zeigen Sie dabei, dass sie am Rand des Definitionsbereichs und in $x = 0$ nicht ableitbar ist. Wird der Graph dieser Funktion mit β bezeichnet, so zeichnen Sie die Kurve $\gamma = \alpha \cup \beta$.
- d) Die Gerade r , mit der Gleichung $x = k$ und $-1 < k < 1$, schneidet γ in den Punkten P und Q . Zeigen Sie, dass die Strecke PQ am größten ist, wenn r der Symmetrieachse von γ entspricht.
- e) Überprüfen Sie, dass die Funktion $H(x) = \frac{1}{2}(\arcsin(x) + x\sqrt{1 - x^2})$ eine Stammfunktion der Funktion $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ist. Berechnen Sie die von γ eingeschlossene Fläche mit der geeignetsten Vorgehensweise.

«Die Werke des Mathematikers müssen schön sein wie die des Malers oder Dichters; die Ideen müssen harmonieren wie die Farben oder Worte. Schönheit ist die erste Prüfung: Es gibt keinen Platz in der Welt für hässliche Mathematik.» (G. H. Hardy)



Ministero dell'istruzione e del merito

H002 - STAATLICHE ABSCHLUSSPRÜFUNG DER OBERSCHULE

Realgymnasium

Realgymnasium mit Schwerpunkt Angewandte Naturwissenschaften

Fach: MATHEMATIK

FRAGEN

1. Es sei ein Dreieck ABC mit rechtem Winkel in B gegeben. Zeigen Sie, dass dieses Dreieck genau dann gleichschenkelig ist, wenn die Höhe BH (über der Hypotenuse) halb so lang ist wie die Hypotenuse.
2. Man wirft fünfmal eine gezinkte Münze, die mit einer Wahrscheinlichkeit p Kopf ergibt.
 - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dabei genau zweimal Kopf zu erhalten?
 - Für welchen Wert von p ist die Wahrscheinlichkeit, genau zweimal Kopf zu erhalten, maximal?
3. Gegeben sei die Ebene $\pi : 3x - 2y + 5 = 0$ im kartesischen Koordinatensystem $Oxyz$.
 - Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes H , der die orthogonale Projektion von $P(4; 2; 1)$ auf die Ebene π darstellt;
 - Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden $s: \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$ mit der Ebene π .
4. Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^3 + x - \cos x = 0$ eine einzige positive Lösung aufweist.
5. Bestimmen Sie die Polynomfunktion vierten Grades $y = p(x)$, wenn bekannt ist, dass ihr Graph im kartesischen Koordinatensystem die folgenden Bedingungen erfüllt:
 - er berührt die x -Achse im Ursprung;
 - er verläuft durch den Punkt $(1; 0)$;
 - er hat einen lokalen Extrempunkt in $(2; -2)$.
6. Man betrachte die Integralfunktion $F(x) = \int_a^x \frac{\cos(\frac{1}{t})}{t^2} dt$, mit $x \geq a$, bei der a einem positiven reellen Wert entspricht. Bestimmen Sie den größtmöglichen Wert für a , sodass $F\left(\frac{2}{\pi}\right) = -\frac{1}{2}$.
7. Am kommenden 5. Juli wird die Erde das Aphel erreichen, den Punkt der Sonnenlaufbahn mit größtem Abstand zur Sonne und einem Abstandswert von $1,52 \cdot 10^{11}$ m. Das Perihel hingegen ist der Punkt mit dem kleinsten Abstand zur Sonne, der ungefähr $1,47 \cdot 10^{11}$ m entspricht. Bestimmen Sie in einem geeigneten Koordinatensystem die Gleichung, die die Bahn der Erde um die Sonne beschreibt.

*Ministero dell'istruzione e del merito***H002 - STAATLICHE ABSCHLUSSPRÜFUNG DER OBERSCHULE****Realgymnasium****Realgymnasium mit Schwerpunkt Angewandte Naturwissenschaften****Fach: MATHEMATIK**

8. Carlo Emilio Gadda schreibt in einer seiner Geschichten aus *L'Adalgisa – Disegni milanesi*: «Die Serviceräume, das Bad, die Gänge, der Vorraum und eine der zwei Toiletten, waren mit kleinen roten Fliesen bedeckt: sechseckig [...]. Das Apothema dieser Kacheln entsprach 5,196 Zentimetern: Dabei betrug der Radius des umschriebenen Kreises 60 Millimeter».
- Geben Sie das genaue Verhältnis von Umkreisradius und Apothema (entspricht dem Inkreisradius) für ein regelmäßiges Sechseck an. Überprüfen Sie das erhaltene Ergebnis unter Berücksichtigung der Maßangaben des Schriftstellers. Erklären Sie, wieso es möglich ist, mit regelmäßigen, kongruenten sechseckigen Fliesen eine Ebene vollständig zu bedecken. Mit welchen anderen regelmäßigen, zueinander kongruenten Vielecken ist es möglich, eine Ebene auszulegen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Dauer der Arbeit: 6 Stunden

Der Gebrauch wissenschaftlicher oder grafischer Taschenrechner ist erlaubt, sofern diese nicht mit einem Algebrasystem ausgestattet sind und keine Zugangsmöglichkeit zum Internet haben.

Der Gebrauch eines zweisprachigen Wörterbuches (Deutsch - Sprache des Herkunftslandes) ist für Schülerinnen und Schüler mit Migrationshintergrund erlaubt.

Das Schulgebäude darf erst drei Stunden nach Bekanntgabe des Themas verlassen werden.