



Ministero dell'istruzione e del merito

H002 - STAATLICHE ABSCHLUSSPRÜFUNG DER OBERSCHULE

Realgymnasium

Realgymnasium mit Schwerpunkt Angewandte Naturwissenschaften

Fach: MATHEMATIK

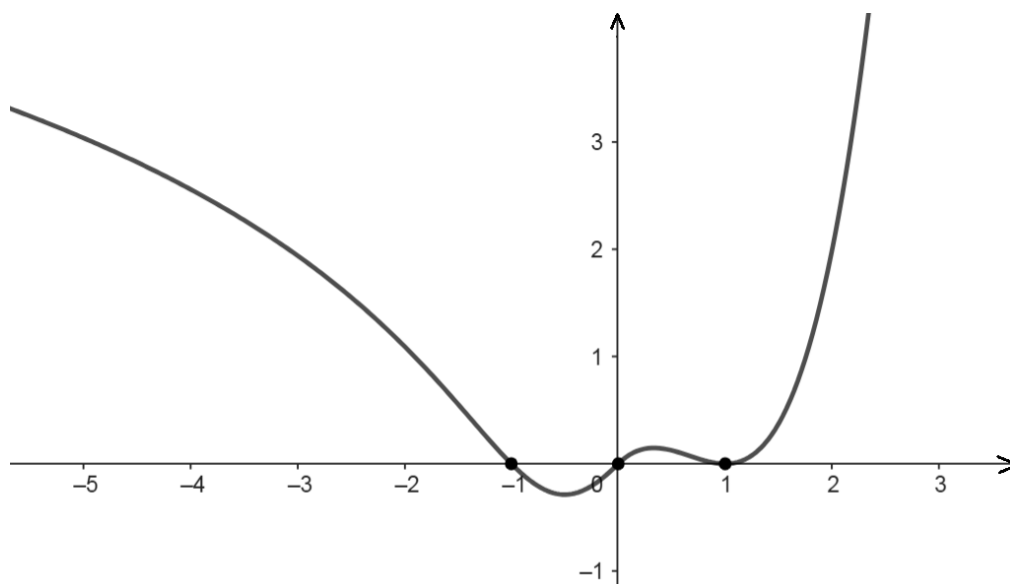
Lösen Sie eine der beiden Problemstellungen und beantworten Sie vier der acht Fragen!

PROBLEMSTELLUNG 1

Gegeben sei die folgende Funktionsschar $f_a(x) = (x^2 + 1)e^{ax+1}$ mit reellem Parameter a , der ungleich Null ist; γ_a bezeichnet den Graphen von f_a .

- Bestimmen Sie die Anzahl der lokalen Extrempunkte und Wendepunkte in Abhängigkeit von a . Berechnen Sie außerdem den positiven Wert für a , sodass der Graph einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente aufweist.
- Untersuchen Sie die Funktion f_1 und zeichnen Sie den Graphen von γ_1 . Erklären Sie, wieso die Funktion f_1 umkehrbar in $\mathbb{R}$ ist. Die Umkehrfunktion wird mit g bezeichnet; geben Sie den Definitionsbereich von g an und bestimmen Sie $g'(e)$.
- Man betrachte die Funktion $F(t) = \int_t^0 f_1(x)dx$, mit $t \leq 0$. Geben Sie die geometrische Bedeutung der Funktion $F(t)$ an und zeigen Sie, dass $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 3e$.
- Sei P_a ein Punkt auf γ_a mit Abszissenwert $x < 0$. Seien außerdem Q_a und R_a ihre Projektionen auf die Koordinatenachsen. Überprüfen Sie, ob es für den Parameter a einen Wert gibt, für den die Fläche des Rechtecks $P_a Q_a O R_a$ einen Maximalwert für $x = -2$ annimmt und berechnen Sie ihn gegebenenfalls.

PROBLEMSTELLUNG 2





Ministero dell'istruzione e del merito

H002 - STAATLICHE ABSCHLUSSPRÜFUNG DER OBERSCHULE

Der Graph γ in der Abbildung stellt die Funktion f dar, die wie folgt definiert ist:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(P_2(x)) & \text{für } x < 0 \\ P_3(x) & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

wobei $P_2(x)$ und $P_3(x)$ jeweils Polynome 2. und 3. Grades sind.

- a) Bestimmen Sie die Polynome $P_2(x)$ e $P_3(x)$ unter Berücksichtigung der aus dem Graphen auslesbaren Informationen und der ergänzenden Hinweise, dass γ die Gerade $y = x$ im Ursprung berührt und die Abszisse in $x = 1$ berührt.

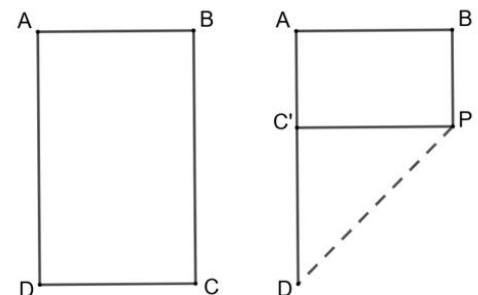
Für die folgenden Teilaufgaben der Problemstellung gilt:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + x + 1) & \text{für } x < 0 \\ x^3 - 2x^2 + x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

- b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Extremwerte und die Abszissenwerte der Wendepunkte von f . Geben Sie, beim Variieren des Parameters k , die Anzahl der Lösungen für die Gleichung $f(x) = k$ an.
- c) Sei n eine positive ganze Zahl, so bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^n}$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^n}$. Überprüfen Sie außerdem, dass nur ein einziger Wert für n existiert, sodass $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n}$ einem endlichen Wert ungleich Null entspricht.
- d) Bestimmen Sie das Verhältnis zwischen den Flächen R_1 e R_2 , die sich im 1. Quadranten befinden und wie folgt definiert sind:
- R_1 befindet sich zwischen γ und der Geraden mit Gleichung $y = x$;
 - R_2 befindet sich zwischen γ und der Abszisse.

FRAGEN

1. Ein Rechteck wird als goldenes Rechteck bezeichnet, wenn das Verhältnis zwischen den Seiten $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ beträgt. Ein Blatt Papier in Form eines goldenen Rechtecks $ABCD$ wird vorgegeben. Zeigen Sie, dass nach dem Falten, wie in Abbildung dargestellt, auch das Rechteck $ABPC'$ ein goldenes Rechteck ist. Bestimmen Sie anschließend die Länge von AD , wenn bekannt ist, dass $AC' = 40$ cm.



2. Zoe spielt mit Eva das folgende Spiel: Ein regelmäßiger Würfel mit sechs Seitenflächen wird geworfen. Zoe erhält einen Punkt, wenn 5 oder 6 geworfen wird, ansonsten erhält Eva den Punkt. Wer zuerst 3 Punkte erreicht, gewinnt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Zoe mit einem Punktestand von 3 zu 1?



Ministero dell'istruzione e del merito

H002 - STAATLICHE ABSCHLUSSPRÜFUNG DER OBERSCHULE

3. Gegeben sind 9 Stifte mit 9 unterschiedlichen Farben und 3 Schubladen, die mit A, B, C bezeichnet werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 Stifte in die Schublade A zu legen, 2 in Schublade B und 3 in Schublade C?
4. In einem kartesischen Koordinatensystem $Oxyz$ im Raum werden die folgenden zwei Geraden angegeben:

$$r: \begin{cases} y - z - 1 = 0 \\ x - z = 4 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Nachdem Sie gezeigt haben, dass sich die zwei Geraden in einem Punkt schneiden, bestimmen Sie die Gleichung der Ebene, die beide enthält. Zeigen Sie, dass die Kugel, die den Mittelpunkt $C(5 | -7 | 2)$ hat und durch den Punkt $P(1 | -1 | 0)$ geht, die Ebene berührt.

5. Das Reuleaux-Dreieck bezeichnet eine Figur, die als architektonisches Element in unterschiedlichen gotischen Kirchen verwendet wird. Die Konstruktion der Figur geht von einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge L aus. Der Zirkel wird in jede Ecke eingestochen und der kleinere Bogen, der durch die anderen zwei Ecken begrenzt wird, gezeichnet. Das Reuleaux-Dreieck bezeichnet die Fläche, die durch die drei Bögen begrenzt wird. Zeigen Sie, dass die Figur einen Umfang von πL hat und geben Sie die Fläche in Abhängigkeit von L an.

6. Bestimmen Sie die Nullstellen von $g(x) = \frac{e^{f(x)} - 1}{x^2}$ im Intervall $[-\pi; \pi]$, wenn gilt: $f(x) = \sin^2(x) - \sin(x)\cos(x)$

7. Gegeben ist die Parabel p mit der Gleichung $y = x^2 + x + 3$. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts T , der auf p liegt und durch den die Tangente an p verläuft, die parallel zur Geraden r mit der Gleichung $3x + 2y - 1 = 0$ ist. Erklären Sie den Grund dafür, dass von allen Punkten auf der Parabel p der Punkt T derjenige mit dem kleinsten Abstand zur Geraden r ist.

8. Es sei die folgende Funktion $f(x) = ax \ln(x) + \frac{b}{x^4} + c \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ gegeben. Bestimmen Sie die Parameter a, b, c so, dass gilt:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ existiert und nimmt einen endlichen Wert an;
- $\int_1^e f(x) dx = 1$.

Dauer der Arbeit: 6 Stunden

Der Gebrauch wissenschaftlicher und/oder grafischer Taschenrechner ist erlaubt, sofern diese nicht mit einem CAS (Computer Algebra System) oder SAS (Symbolic Algebra System) ausgestattet sind und keine Verbindungsmöglichkeit zum Internet aufweisen.

Der Gebrauch eines zweisprachigen Wörterbuchs (Deutsch - Sprache des Herkunftslandes) ist für Kandidatinnen und Kandidaten nicht deutscher Muttersprache erlaubt.

Das Schulgebäude darf erst drei Stunden nach Bekanntgabe des Themas verlassen werden.