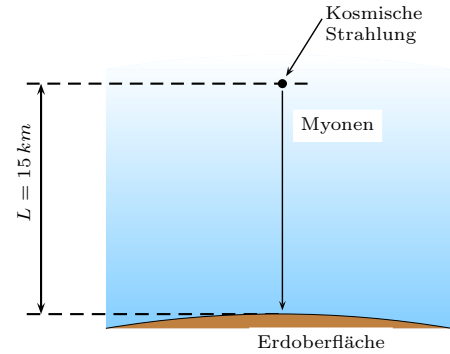


Frage 4

Die kosmische Strahlung wechselwirkt mit den höheren Atmosphärenschichten und erzeugt Teilchen, die Myonen genannt werden, die sehr instabil sind und im Eigensystem eine mittlere Lebensdauer von ca. $2,2\mu\text{s}$ haben um dann üblicherweise in ein Elektron und ein Neutrino und Antineutrino zu zerfallen. Die Geschwindigkeit der in der Atmosphäre erzeugten Myonen ist sehr hoch und in einigen Fällen im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit nicht vernachlässigbar klein.



(Anmerkung zur Übersetzung: Der letzte Satz ist vermutlich etwas unglücklich, da ja nicht die Geschwindigkeit vernachlässigt/nicht-vernachlässigt wird. Besser wäre es vermutlich gewesen, wenn im Text stehen würde, dass die Geschwindigkeit so hoch ist, dass die relativistischen Effekte nicht vernachlässigt werden können.)

Nehmen sie an, dass ein in der Höhe L erzeugtes Myon nach einer Zeit, die der mittleren Lebensdauer entspricht zerfällt und dabei $\frac{2}{3}$ der Höhe L zurückgelegt hat. Unter Berücksichtigung der beiden Ereignisse - Erzeugung und Zerfall des Myons - sind im System des Teilchens und im System der Erde die entsprechenden zeitlichen und räumlichen Abstände zwischen den Ereignissen, die Geschwindigkeit des Teilchens im Erdsystem und der zurückgelegte Weg im Teilchensystem zu berechnen.

Lösung: Man kennt die Eigenzeit $\Delta t'$ und den zurückgelegten Weg $s = \frac{2}{3} L$ im Erdsystem. Die Eigenzeit (also die mittlere Myonenlebensdauer) und die entsprechende Zeit im Erdsystem hängen nach folgender Beziehung entsprechen der Zeitdilatation zusammen ($\beta = \frac{v}{c}$ Relativgeschwindigkeit, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$):

$$\Delta t = \Delta t' \cdot \gamma \quad \text{die Zeit vergeht im Laborsystem schneller.}$$

Die Geschwindigkeit des Myons ergibt sich dann über die folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} v = \frac{\Delta s}{\Delta t} &\Rightarrow \overbrace{\beta \cdot c}^v = \frac{\Delta s}{\Delta t' \cdot \gamma} = \frac{\Delta s}{\Delta t'} \cdot \sqrt{1-\beta^2} &\Rightarrow \beta^2 \cdot c^2 = \left(\frac{\Delta s}{\Delta t'}\right)^2 \cdot (1-\beta^2) \\ \Rightarrow \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{c^2 \cdot \Delta t'^2}{\Delta s^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 \cdot (2,2 \cdot 10^{-6} \text{ s})^2}{(10000 \text{ m})^2}}} = 0,99783 &\Rightarrow v = \beta \cdot c = 2,9915 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Für das Myon bewegt sich die Erde mit v . Der zurückgelegte Weg ist $v \cdot \Delta t' = 655,93 \text{ m}$. Diese Strecke legt die Erde im Myonensystem zurück.

Frage 5

Gammastrahlung der Energie 20 keV erfährt an einem freien ruhenden Elektron eine Comptonstreuung. Zu berechnen ist

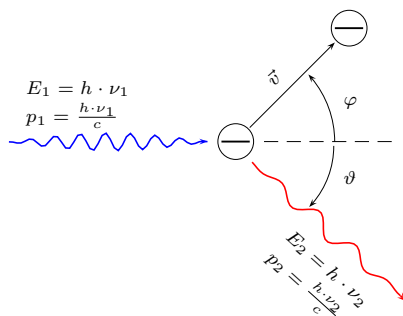
1. die Wellenlänge der einfallenden Röntgenstrahlung und die Wellenlänge der unter einem Winkel von 90° gestreuten Röntgenstrahlung,
2. die Energie der gestreuten Röntgenstrahlung und die kinetische Energie des Elektrons nach dem Stoß.

Lösung: Es wird anfangs die Wellenlänge des einfallenden Röntgenquants bestimmt (Plancksches Wirkungsquantum: $h = 6,626 \cdot 10^{-34}\text{ Js} = 4,136 \cdot 10^{-15}\text{ eVs}$):

$$E_1 = h \cdot \nu_1 \Rightarrow \nu_1 = \frac{E_1}{h} = \frac{20\text{ keV}}{4,136 \cdot 10^{-15}\text{ eVs}} = 4,836 \cdot 10^{18} \frac{1}{s} \quad c = \lambda_1 \cdot \overbrace{\nu_1}^{1/T_1} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{c}{\nu_1} = 6,2 \cdot 10^{-11}\text{ m}$$

Bei dieser Aufgabenstellung braucht es die Formeln zur Comptonstreuung (eine Herleitung ist an dieser Stelle zu umfangreich):

Masse des Elektrons: $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}\text{ kg}$



$$\lambda_C = \frac{h}{m_e \cdot c}$$

$$\Rightarrow \lambda_C = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}\text{ Js}}{9,11 \cdot 10^{-31}\text{ kg} \cdot 2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

$$\Rightarrow \lambda_C = 2,426 \cdot 10^{-12}\text{ m}$$

$$\Delta\lambda = \lambda_C \cdot (1 - \cos(\vartheta))$$

$$\cos(90^\circ)=0 \Rightarrow \Delta\lambda = \lambda_C = 2,426 \cdot 10^{-12}\text{ m}$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda = 6,2 \cdot 10^{-11} + 2,426 \cdot 10^{-12}\text{ m} = 6,443 \cdot 10^{-11}\text{ m}$$

Die Energie des gestreuten Röntgenquants:

$$E_2 = h \cdot \nu_2 = h \cdot \frac{c}{\lambda_2} = 4,136 \cdot 10^{-15}\text{ eVs} \cdot \frac{2,988 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{6,443 \cdot 10^{-11}\text{ m}} = 19,245\text{ keV}$$

Die Energieänderung des Röntgenquants hat sich als kinetische Energie auf das Elektron übertragen:

$$E_{kin, Elektron} = \Delta E_{\gamma-Quant} = E_1 - E_2 = 20\text{ keV} - 19,245\text{ keV} = 0,755\text{ keV}$$

Frage 6

Die Energie eines Elektron, welches entsprechend dem Bohrschen Atommodell eine erlaubte Bahn im Wasserstoffatom besetzt, ist durch folgende Beziehung gegeben:

$$E_n = -\frac{13,6 \text{ eV}}{n^2} \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Zu bestimmen ist die Geschwindigkeit und der Radius der Bahn des Elektrons, wenn dieses sich auf dem ersten angeregten Niveau des Atoms befindet.

Lösung: Da von den erlaubten Bahnen im Rahmen des Bohr'schen Atommodell gesprochen wird erfolgt die Berechnung teilweise **klassisch** (also ohne die Verwendung der Schrödingergleichung und der Bestimmung der Erwartungswerte für Ort und Geschwindigkeit). Die Coulombkraft zwischen Elektron und Atomkern (Proton) ist die Zentripetalkraft, die die Elektronen auf die Kreisbahn *zwingt* (in Beträgen):

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} = m_e \cdot r \cdot \omega^2 \quad \left(\text{bzw.:} \quad \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} = m_e \cdot \frac{v^2}{r} \right)$$

Die Energie des Elektrons besteht aus der mit der Bahnbewegung verknüpften *kinetische Energie* und der *potentiellen Energie* des Elektrons im vom Kernproton erzeugten elektrischen Feld (bezogen auf einen Punkt in unendlicher Entfernung):

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot r^2 \cdot \omega^2 - q_e \cdot \frac{q_p}{4\pi\epsilon_0 \cdot r} \quad \xRightarrow{m_e \cdot r \cdot \omega^2 = q^2 / (4\pi\epsilon_0 \cdot r^2)} \quad E = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 \cdot r}$$

Bis hier sind die Herleitungen klassisch. Nun erfolgen weitere "halbklassische" Schritte. Die Energie $E_{n=2}$ des Elektrons ist **quantisiert** (siehe Angabe) und im ersten angeregten Zustand $n = 2$ bekannt:

$$E_2 = -\frac{13,6 \text{ eV}}{4} = -3,4 \text{ eV}$$

Die vorhergehende Gleichung wird deshalb auf r umgestellt und mit E_2 wird r berechnet:

$$E_2 = -\frac{q^2}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0 \cdot r} \quad \Rightarrow \quad r = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 \cdot E_2} = -\frac{(1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{8 \cdot \pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot -3,4 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 212 \text{ pm}$$

Die Bahngeschwindigkeit wird wieder klassisch gerechnet:

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m_e \cdot \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v_{Bahn} = \frac{q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 \cdot m_e \cdot r}} = 1094000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Einheiten: $\left[\frac{\text{C}^2}{\frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot \text{J}} \right] = \left[\frac{\cancel{\text{C}}}{\frac{1}{\cancel{\text{m}}} \cdot \cancel{\text{J}}} \right] = [\text{m}] \quad \text{und} \quad \left[\frac{\text{C}}{\sqrt{\frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot \text{kg} \cdot \cancel{\text{m}}}} \right] = \left[\frac{\text{C}}{\sqrt{\frac{\text{C}}{\text{J}} \cdot \text{kg}}} \right] = \left[\frac{\cancel{\text{C}}}{\sqrt{\frac{\cancel{\text{kg}} \cdot \cancel{\text{m}}^2 / \text{s}^2}{\cancel{\text{J}}}}} \right] = \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$

Eine Berechnung des Bahnradius ist auch durch Verwendung der **Quantisierung des Drehimpulses** möglich. Für den Drehimpuls des Elektrons gilt die Quantisierung:

$$L_e = \underbrace{m_e \cdot \overbrace{\vec{r} \times \vec{v}}^{\perp \rightarrow r \cdot v}}_{\text{klassisch}} = \underbrace{n \cdot \hbar}_{\text{quantisiert}} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{n \cdot \hbar}{m_e \cdot r}$$

Dies in die Gleichung für die Kreisbewegung ($F_{zpt} = F_{Coulomb}$) eingesetzt und dann umgestellt auf r ergibt folgende Gleichung ($\hbar = \frac{h}{2\pi}$):

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m_e \cdot \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad r_n = \frac{h^2 \cdot \epsilon_0}{\pi \cdot m_e \cdot q^2} \cdot n^2 = \frac{(6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js})^2 \cdot 8,8540 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}}{\pi \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2} \cdot 2^2 = 212 \text{ pm}$$

Einheiten: $\left[\frac{\text{J}^2 \cdot \text{s}^2 \cdot \frac{\text{As}}{\text{Vm}}}{\text{kg} \cdot \text{C}^2} \right] = \left[\frac{\text{J}^2 \cdot \text{s}^2 \cdot \cancel{\text{C}}}{\text{kg} \cdot \cancel{\text{C}}} \right] = \left[\frac{\cancel{\text{kg}} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{s}^2 \cdot \frac{1}{\cancel{\text{m}}}}{\cancel{\text{kg}}} \right] = [\text{m}]$

Frage 2

Eine quadratische Metallschleife mit Seitenlänge $l = 4.0\text{cm}$ bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit $v = 2.0 \cdot 10^{-2}\text{m/s}$ parallel zu einer der Seiten auf einer Ebene.

Während der Bewegung durchläuft die Schleife, die einen Widerstand von 0.50Ω besitzt, Bereiche in denen ein homogenes Magnetfeld $\vec{B}$ der Stärke 1.0 mT herrscht, das senkrecht zur Ebenen der Schleife verläuft und dessen Richtung in Abbildung 1 dargestellt wird.

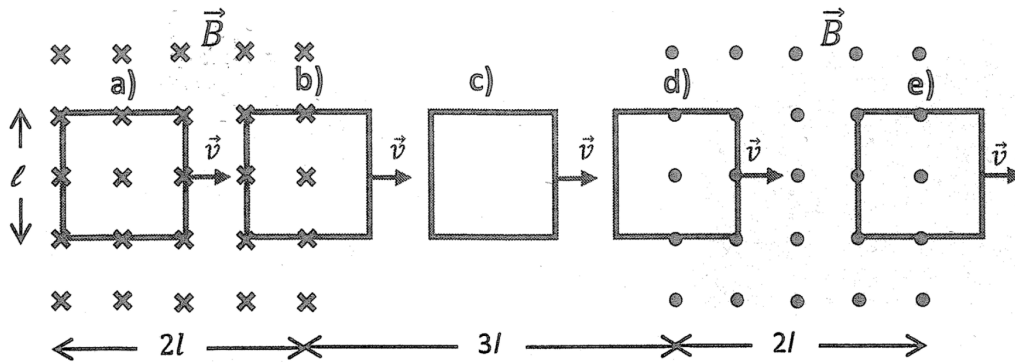


Abbildung 1

Bestimme den Verlauf der Stromstärke $i(t)$, in den ersten 15 Sekunden, angefangen von der Position a); vernachlässige hierbei Effekte die auf der Selbstinduktion beruhen.

Frage 3

Das Auflösungsvermögen eines Lichtmikroskops ist indirekt proportional zur Wellenlänge des Lichts, das zur Beleuchtung der Probe verwendet wird. Ein höheres Auflösungsvermögen ermöglicht es kleinere Details der untersuchten Probe zu unterscheiden und höhere Vergrößerungen zu erhalten.

In einem Elektronenmikroskop wird das sichtbare Licht durch ein Elektronenstrahl ausgetauscht. Diese werden mittels einer Spannung der Größenordnung von zehn kV beschleunigt und verhalten sich wie Wellen. Diesen Teilchen werden Wellenlängen zugeordnet, die um einen Faktor bis zu 10^5 kleiner als die des sichtbaren Lichts sind. Daher kann die Vergrößerung eines Elektronenmikroskops um einen Faktor 10^5 größer sein im Vergleich zu der eines Lichtmikroskops.

Ein Elektronenmikroskop arbeitet mit einem Elektronenstrahl, bei dem die Elektronen eine Wellenlänge von $\lambda = 5 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ besitzen.

1. Nachdem du bestimmt hast, ob sich die beschleunigten Elektronen mit relativistischen Geschwindigkeiten bewegen oder nicht, bestimme ihre Geschwindigkeit.
2. Bestimme die Beschleunigungsspannung ΔV , die die Elektronen beschleunigt, wenn bekannt ist, dass diese mit vernachlässigbarer Geschwindigkeit von einer Glühwendel aus Wolfram ausgestrahlt werden.