

Ein "Idealer" Generator - Variante

Dein Freund Luis möchte bei einem schulischen Wettbewerb mit folgender genialer antreten: Er hat einen Wechselspannungsgenerator entworfen, der, einmal angeworfen, für seine Funktion keine weitere Energie braucht, außer ein wenig, um die Reibung zu überwinden. Seine Pläne sind in folgender Abbildung gezeigt; um den Generator in Betrieb zu setzen, muss man den metallischen Stab (Masse 20g) um eine Strecke a auslenken.

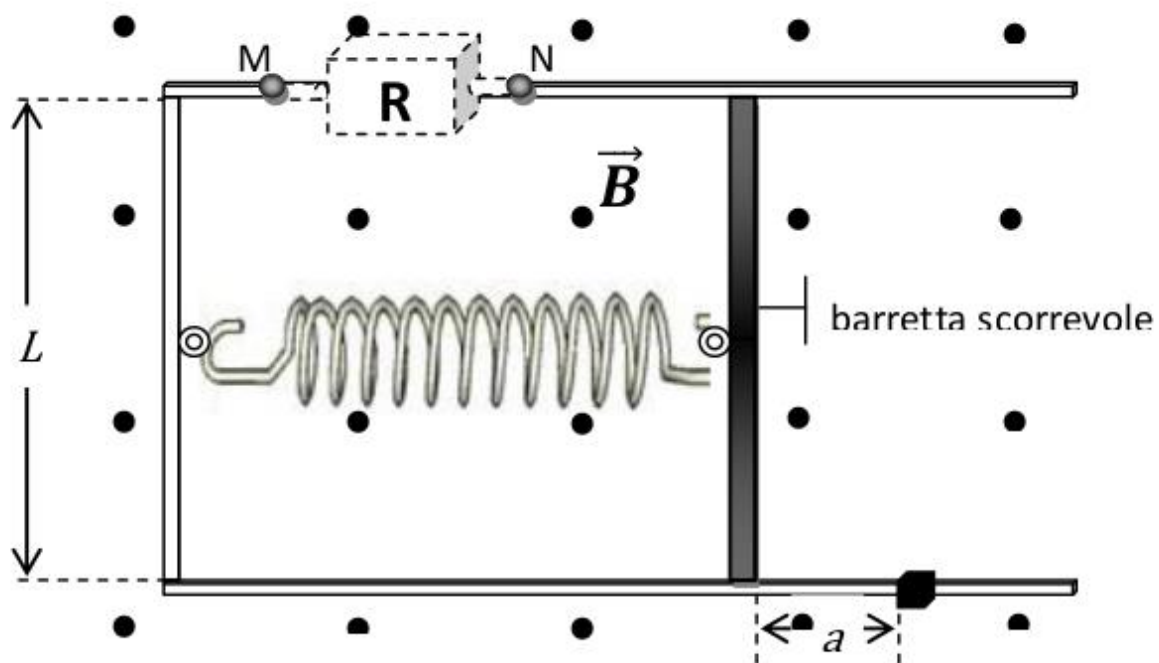


Figura 1 – Schema

Abb. 1: Prinzipskizze des Generators

Luis baut im Labor nun diesen Generator auf, setzt ihn in Betrieb und misst die Potentialdifferenz zwischen den Punkten M und N, einmal ohne und einmal mit einem Widerstand R.

Die Messwerte lassen ihn allerdings stutzig werden, sie zeigen folgenden zeitlichen Verlauf:

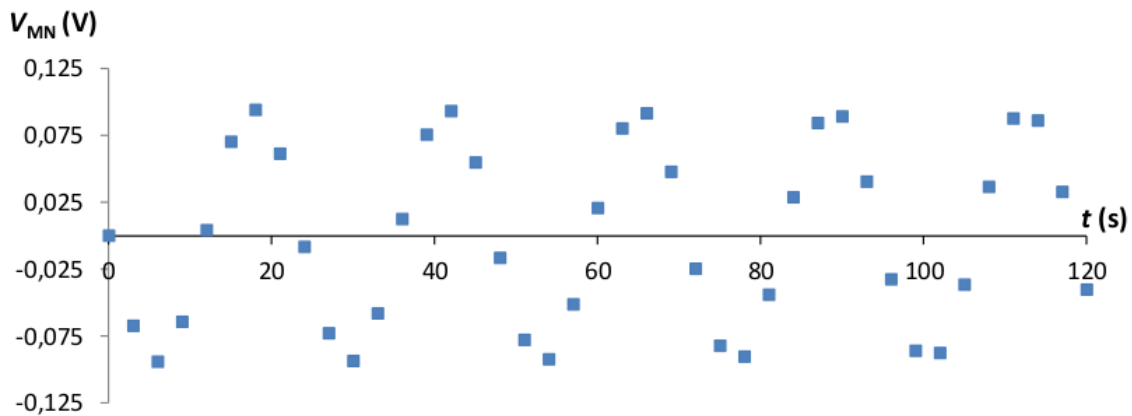


GRAFICO 1 - d.d.p. V_{MN} in funzione del tempo, senza la resistenza R

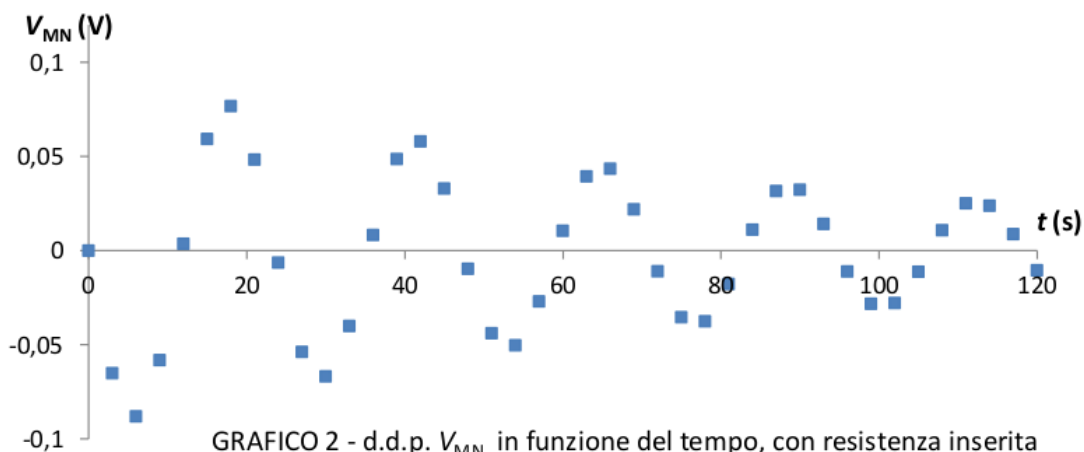


GRAFICO 2 - d.d.p. V_{MN} in funzione del tempo, con resistenza inserita

Um Luis zu helfen, sollst Du folgende Aufgabenstellungen behandeln:

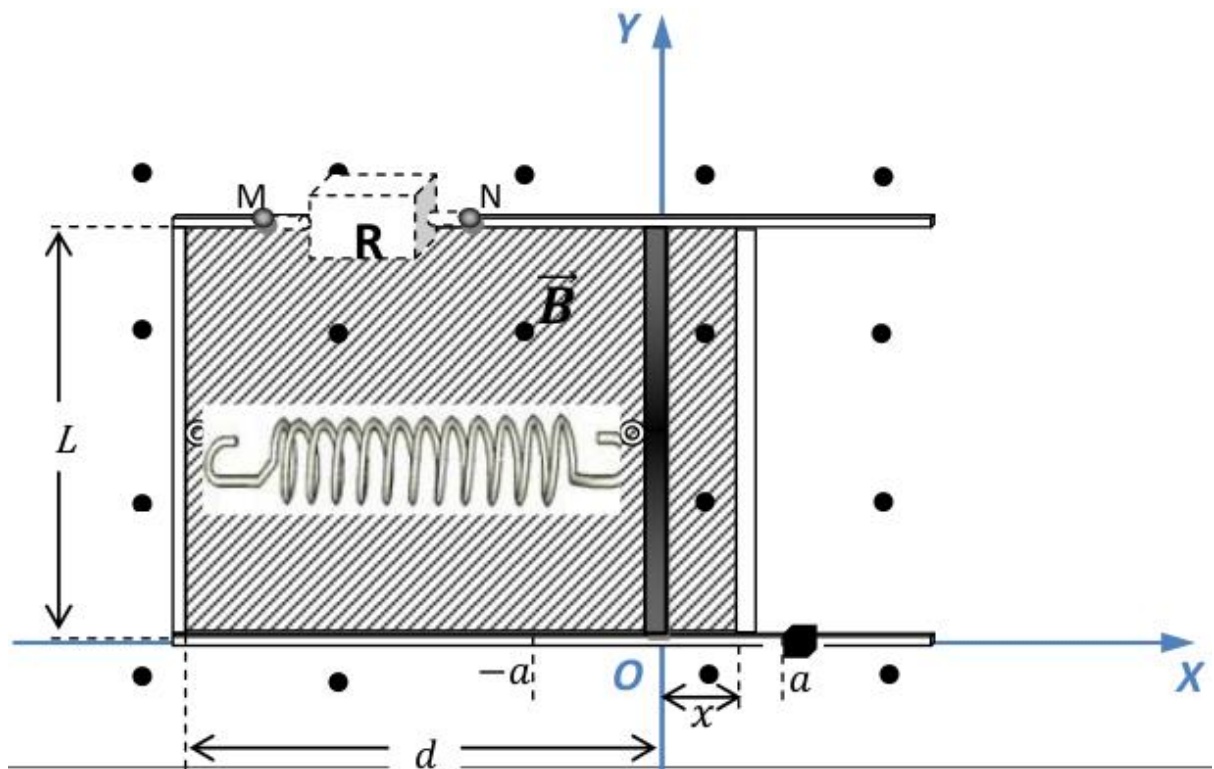
1. Untersuche und beschreibe die in Abb.1 dargestellte physikalische Situation.
2. Ist die Federkonstante der eingesetzten Feder von Bedeutung, wenn man eine Wechselspannung mit der Frequenz 50 Hz erzeugen möchte?
3. Beschreibe und erkläre den von Luis erwarteten zeitlichen Spannungsverlauf.
Berechne den Maximalwert dieser Induktionsspannung für $a = 1,0\text{cm}$; $L = 10\text{cm}$; $B = 0,30\text{T}$; $f = 50\text{Hz}$.
4. Interpretiere die Graphen 1 und 2 und bestimme die Art der Bewegungen, die der Stab durchführt.
5. Wie würdest du Luis erklären, was in Hinsicht auf die involvierten Energien bei diesem Experiment passiert? Warum ist seine Idee also doch nicht so genial?

LÖSUNG

1. In der Abbildung ist eine U-förmige Führung der Breite L zu sehen, wobei der obere Leiter eine Unterbrechung aufweist (zwischen den Punkten M und N), in welche ein Widerstand eingebracht werden kann. Zwischen diesen Punkten kann die Potentialdifferenz gemessen werden. In dieser Führung kann sich ein metallischer

Stab der Länge L mit vernachlässigbarer Reibung bewegen. Sowohl Führung als auch Stab müssen aus elektrisch leitfähigen Materialien bestehen, damit ein Stromfluss zustande kommen kann. Die Feder muss isoliert angebracht werden, damit nicht ein Teil des Stromkreises kurzgeschlossen wird. Alles zusammen befindet sich in einem homogenen Magnetfeld B , das senkrecht zur Führungsebene orientiert ist (aus der Zeichenebene heraus).

2. (Hinweis: Für die Fragestellung in dieser Form ist der Wert der Federkonstante nicht explizit zu bestimmen (und ist für den weiteren Verlauf auch nicht benötigt), weshalb der Prüfling auch nur eine qualitative Antwort geben kann.) Der Wert der Federkonstante hat sehr wohl einen Einfluss auf die Frequenz der Schwingung: eine härtere Feder führt zu einer größeren Schwingungsfrequenz. Quantitative Betrachtung: Solange noch kein Widerstand zwischen A und B eingebracht wird fließt kein Strom; der Metallstab ist nur der elastischen Kraft der Feder unterworfen und führt eine harmonische Bewegung $x(t) = a \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$ aus, wobei a die Amplitude der Schwingung ist; Die Frequenz der Schwingung ist gegeben durch $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$. Da diese 50 Hz betragen soll, findet man für die Federkonstante $k = 1973,9 \text{ N/m} \approx 2000 \text{ N/m}$.
3. Um die Induktionsspannung zu bestimmen, muss man ein Koordinatensystem einführen (siehe Abb.)



Damit findet man für den magnetischen Fluss $\Phi(t) = BL(d + x(t)) =$

$$BL(d + a \cos(2\pi f t)) \text{ und damit } U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -BL \frac{dx(t)}{dt} = 2\pi f B L a \sin 2\pi f t.$$

Der Maximalwert wird erreicht, wenn der sinus 1 ergibt und folglich $U_{ind,max} = 94,2mV$.

4. Graphik 1 entspricht einer ungedämpften harmonischen Schwingung, wonach Luis's Idee funktionieren würde. Graphik 2 hingegen zeigt eine gedämpfte Schwingung, die dadurch zustandekommt, dass der Widerstand den Stromkreis schließt. Durch diesen Strom wirkt auf den Stab die Lorentzkraft, welche den Stab zu bremsen versucht (nach Lenz). Mit der rechten Hand Regel findet man, falls $v > 0$, also während der Bewegung nach rechts, fließen die Elektronen also gegen den Uhrzeigersinn bzw. der technische Strom im Uhrzeigersinn. Dasselbe Resultat kann mittels $F = ILB$ erhalten werden. Da die Lorentzkraft proportional zur Geschwindigkeit des Metallstabes ist, stellt dies eine viskose Kraft dar.
5. Eine energetische Betrachtung liefert folgendes: Die Lorentzkraft bewirkt eine negative Arbeit, wodurch die kinetische Energie des Stabes verkleinert wird und hiermit natürlich auch die induzierte Spannung und der Strom; nach einiger Zeit wird der Stab zur Ruhe kommen. Quantitativ gesehen ist der Betrag der von der Lorentzkraft geleisteten Arbeit bzw. Leistung ($P_L = |Fv| = ILBv$) genau gleich groß wie die Joule'sche Wärme, die im Widerstand erzeugt wird ($P_R = U_{ind}I = LBvI$). Aus diesem Grund ist der Generator von Luis nicht ideal, es wird nur die ursprünglich in der Feder gespeicherte Energie nach und nach in Wärme umgewandelt, es besteht also auch keine Verletzung des Energieerhaltungssatzes.

Original:

Titolo (max 50 caratteri):	<i>Un generatore "IDEALE"</i>
Descrizione (max 300 caratteri):	<i>Si chiede di valutare la consistenza del progetto di un generatore di tensione il cui funzionamento si basa sul fenomeno dell'Induzione elettromagnetica</i>
Disciplina (una o più):	<i>Fisica</i>
Tempo Richiesto	<i>3h</i>
Conoscenze richieste	<i>Moto armonico Grandezze elettriche Induzione elettromagnetica Forza magnetica su filo percorso da corrente Conservazione dell'energia meccanica</i>
Autori	Paola De Paolis, mapatar@tiscali.it
Note	La prova è una nuova versione di quella proposta nella simulazione dello scorso a.s..La rivisitazione è stata portata avanti dal gruppo Fisica A di Rovereto per adeguarla alle caratteristiche di una vera prova esperta ed alla nuova rubric di valutazione.
Versione	02 – 23/11/2015

Eine Weltraummission

Im Jahr 2200 kann das modernste vom Menschen gebaute Raumschiff eine Geschwindigkeit von 75% der Vakuumlichtgeschwindigkeit erreichen. Du wirst Teil der Besatzung einer Mission sein, die einen Planeten, der um den Stern Sirius kreist, erreichen soll. Sirius ist 8,61 Lichtjahre von der Erde entfernt und nähert sich unserem Sonnensystem mit einer Geschwindigkeit von 7,63 km/s. Auf dem Planet angekommen, soll die Besatzung dort 2,00 Jahre verschiedene Experimente durchführen und dann zur Erde zurückkehren. Du sollst zur Organisation dieser Reise beitragen, um beispielsweise die benötigte Menge an Nahrung zu bestimmen. Nimm als Referenzzeitpunkt $t=0$ den Zeitpunkt des Starts von der Erde; auch kannst Du annehmen, dass die gesamte Reise mit maximaler Fluggeschwindigkeit stattfindet und damit sämtliche Effekte, die durch die Beschleunigungsphasen auftreten, vernachlässigt werden können.

Du kannst noch zusätzliche Annahmen treffen, um folgende Fragen zu beantworten:

1. **Wieviel Zeit vergeht für einen Beobachter auf der Erde, bis die Mission zurückkehrt?**
2. **Wieviel Zeit vergeht für das Equipment (Ausstattung) während des Hinflugs bzw. des Rückflugs?**
3. **Wieviel Zeit vergeht für das Equipment, bis die Mission zur Erde zurückkehrt?**

Auf der Erde haben unterdessen einige Tests an der im Raumschiff verwendeten Elektronik gezeigt, dass Instandhaltungsarbeiten durchgeführt werden müssen. Nach einem Jahr (auf der Erde) wird also ein Signal zum Raumschiff gesendet.

4. **Wieviel Zeit vergeht für den Kapitän des Raumschiffs, bis ihn das Signal erreicht?**

Als er das Signal empfängt, sendet der Kapitän sofort eine Bestätigung an die Erde zurück.

5. **Wie lang nach dem Aussenden des Signals an das Raumschiff kommt diese Bestätigung auf der Erde an?**

Mit Fortdauer der Hinreise und damit größeren Distanzen werden die Verzögerungen in der Kommunikation mit der Erde immer größer; um dies der Öffentlichkeit zu erklären,

6. **Zeichne in ein kartesisches Koordinatensystem die Kurven für den Abstand des Raumschiffs von Erde sowie die beiden Kommunikationssignale in Abhängigkeit von der Zeit ein.**

Der Verantwortliche für die Sicherheit der Raummission teilt Dir eine Sorge mit: er befürchtet, dass aufgrund der relativistischen Längenkontraktion das Symbol der Erdenflotte für die Grenzwatchen nicht erkennbar sei und dass diese einen falschen Alarm auslösen könnten.

7. **Ist dies eine begründete Sorge? Erläutere Deine Überlegungen in Hinsicht auf diese Befürchtungen. Stelle auch quantitative Überlegungen an, um eine Lösung für dieses Problem zu finden.**

Lösung: eine Weltraummission

Notation: Wir bezeichnen die Zeit und Zeitintervalle im Ruhesystem (Erde) mit t und Δt , während gestrichene Größen im bewegten System gemessen werden: t' und $\Delta t'$. Jahre bzw. Lichtjahre werden mit y und ly bezeichnet.

- Die Reise besteht aus drei Phasen: eine Hinfahrt der Dauer Δt_H , der Aufenthalt auf Sirius der Dauer Δt_A und der Rückreise der Dauer Δt_R . Für einen Beobachter auf der Erde ergibt sich $\Delta t_H = \frac{8,61ly}{0,75c} = 11,48y$. $\Delta t_A = 2y = \Delta t'_A$, da die Geschwindigkeit von Sirius im Vergleich zu c vernachlässigbar ist: $\frac{v}{c} = 2,5 \times 10^{-5}$ bzw. $\gamma_{\text{Sirius}} \approx 1 + \frac{1}{2} (2,5 \times 10^{-5})^2 = 1 + 3,125 \times 10^{-10}$. Die Rückreise dauert gleich lang wie die Hinfahrt, woraus folgt:

$$\Delta t_{\text{Gesamt}} = 2 \cdot 11,48y + 2y \approx 25y.$$

- Auch im bewegten Bezugssystem dauern Hin- und Rückfahrt gleich lange, allerdings ist diese Zeitspanne um den Lorentzfaktor verkürzt:

$$\Delta t'_A = \frac{\Delta t_A}{\gamma} = \Delta t_A \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 7,59y = \Delta t'_R.$$

- Insgesamt dauert die Mission also aus Sicht des bewegten Beobachters also

$$\Delta t'_{\text{Gesamt}} = 2 \cdot 7,59y + 2y \approx 17,19y.$$

- Das Signal wird von der Erde zum Zeitpunkt $t_0 = 1y$ und vom Ort $x_0 = 0$ ausgesandt. Nach den Lorentztransformationen findet man

$$\begin{aligned} x'_0 &= \gamma(x_0 - vt_0) = -1,13ly \text{ und} \\ t'_0 &= \gamma\left(t_0 - \frac{vx_0}{c^2}\right) = 1,512y. \end{aligned}$$

Das Signal benötigt also, im bewegten System gemessen, eine Zeit von

$$\Delta t'_1 = \frac{|x'_0|}{c} = 1,13y,$$

weshalb das Signal das Raumschiff zum Zeitpunkt $t'_{\text{Signal}} = t'_0 + \Delta t'_1 = 2,65y$ erreichen wird.

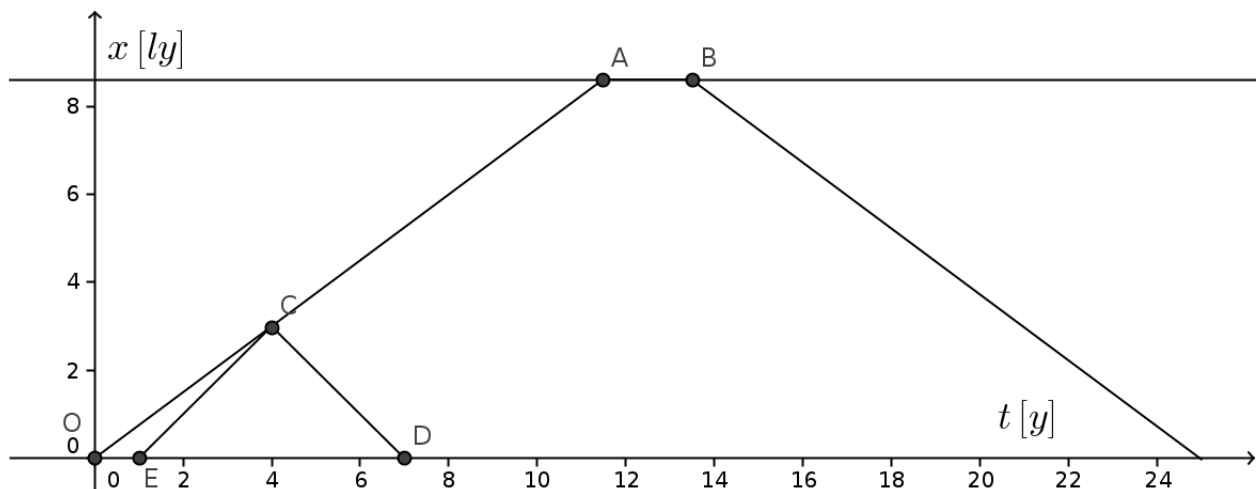
- Im Ruhesystem der Erde erreicht das Signal das Raumschiff nach der Zeit t_{signal} , welche aus dem Schnittpunkt der Graphen des Raumschiffs und dem Signal erhalten werden kann:

$$c \cdot (t_{\text{signal}} - t_0) = v \cdot t_{\text{signal}} \Rightarrow t_{\text{signal}} = \frac{c}{c - v} \cdot t_0 = 4y$$

Zu diesem Zeitpunkt ist das Raumschiff $3ly$ von der Erde entfernt, die Bestätigung benötigt also noch drei Jahre, um wieder auf der Erde anzukommen. Insgesamt kommt die Bestätigung also sechs Jahre nach dem Aussenden des Signals auf der Erde an.

Natürlich kann man den Zeitpunkt t_{signal} auch aus der Umkehrung der Lorentztransformationen erhalten: $t_{\text{signal}} = \gamma \cdot t'_{\text{signal}}$.

- Nachfolgendes Orts Zeit Diagramm zeigt die gesamte Situation:



NB: Von den Schülern wurde nur die Darstellung bis ca. 7y-8y verlangt.

Zur Erklärung: Die Strecke OA stellt die Distanz des Raumschiffs von der Erde dar, EC ist das von der Erde ausgesandte Signal, CD die Bestätigung.

7. Die Befürchtung des Sicherheitsbeauftragten ist durchaus gerechtfertigt; Die Lorentzkontraktion tritt nur entlang der Bewegungsrichtung auf und deswegen würde ein auf der Seite des Schiffes angebrachter Kreis zu einer Ellipse verzerrt, deren eine Halbachse in Bewegungsrichtung um $\gamma = 1,512$ verkürzt ist. Daraus erhält man eine Exzentrizität von $\varepsilon = \sqrt{1 - v^2/c^2} = 0,75$. Um eine Verzerrung des Symbols zu verhindern, muss das Symbol an der Front des Raumschiffs angebracht werden.