

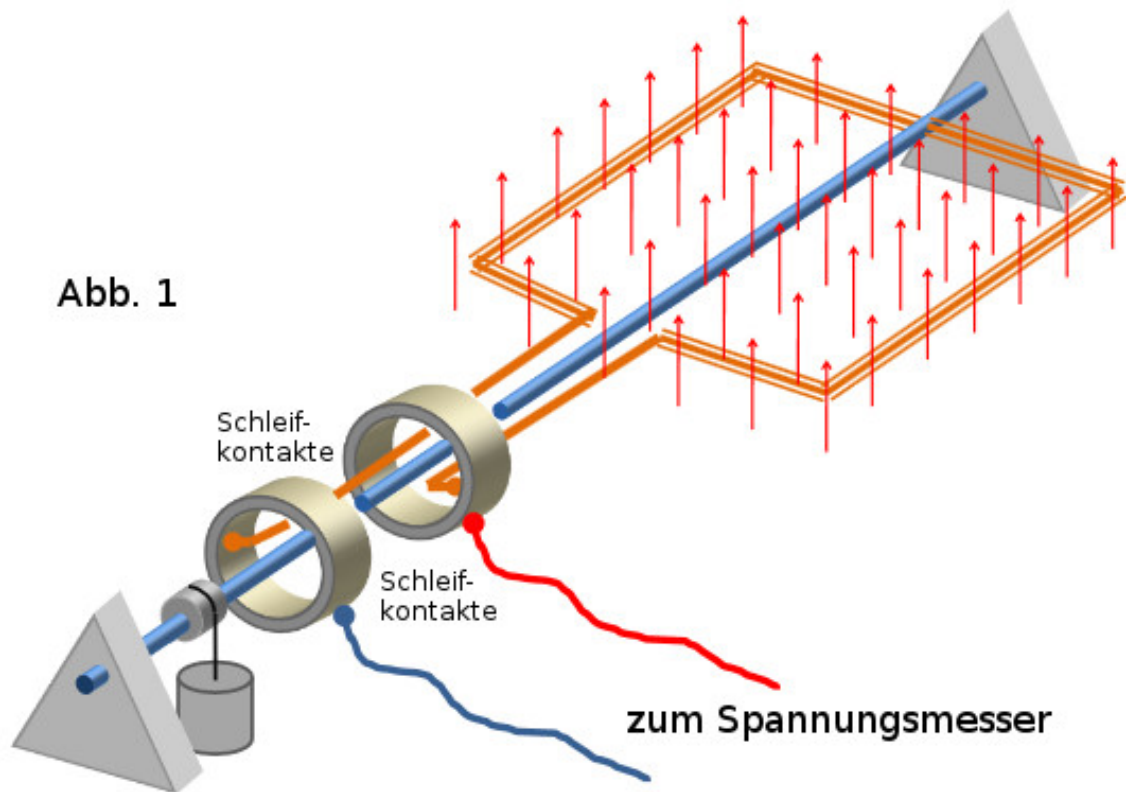
Problem 1:

Abbildung 1 zeigt einen Versuch. Die Spule besteht aus 100 rechteckigen Windungen aus Kupfer. Das Rechteck hat die Abmessungen 25 cm mal 30 cm . Die Spule rotiert um eine Achse (die Reibung wird vernachlässigt). Die Enden des Drahtes berühren bei ihrer Bewegung zwei leitende Ringe, sodass ein elektrischer Kontakt gebildet wird. Die Spule befindet sich in einem homogenen magnetischen Feld, das konstant ist.

Am Ende der Achse ist ein Zylinder angebracht, um den ein Faden gewickelt ist. Am Faden ist ein kleines Gewicht befestigt. Sobald das Gewicht losgelassen wird, fällt es nach unten und versetzt die Spule in Drehung. Beim Start des Gewichtes ist die Ebene der Spule senkrecht zur Richtung des Magnetfeldes. Während der Drehung bleiben die Enden der Spule offen, sodass kein Strom fließen kann. Durch die Rotation wird eine Spannung induziert. Diese wird durch ein Gerät aufgenommen, das 1000 Messungen pro Sekunde macht.

In Abbildung 2 sind die Messwerte abgebildet. Es zeigt die gemessene Spannung zwischen den Enden der Spule in Abhängigkeit von der Fallzeit des Gewichtes.

Abbildung 3 zeigt den gleichen Graphen. Hier sind die Messpunkte verbunden worden, um eine bessere Ablesung zu ermöglichen.



1. Erkläre das physikalische Phänomen, das die Spannung zwischen den Enden der Spule erzeugt! Erkläre damit den speziellen Verlauf des gemessenen Graphen!
2. Verwende das Gesetz, das hinter dem physikalischen Phänomen steckt, um die theoretische Funktion $y = f(t)$ herzuleiten, die die induzierte Spannung zwischen den Enden der Spule in Funktion der Zeit beschreibt!
Zeige, dass diese Funktion, in Übereinstimmung mit dem Graphen, eine wachsende Amplitude und eine abnehmende Periode hat! Verwende die Stärke des Magnetfeldes B und die Winkelbeschleunigung α der Spule als Parameter. Die Enden der Spule sind offen!
3. Lies aus dem Graphen die quantitativen Größen ab, die du brauchst, um den Wert der Winkelbeschleunigung der Spule sowie die Stärke des Magnetfeldes zu bestimmen!

4. Erkläre, welche physikalische Bedeutung die Fläche hat, die in Abbildung 3 hervorgehoben wird (diese Fläche wird von einer halben Periode auf der t -Achse und dem Graphen eingeschlossen)!
 Zeige mit Hilfe der Funktion $y = f(t)$, dass diese Flächen dem Betrag nach alle den gleichen Wert besitzen!

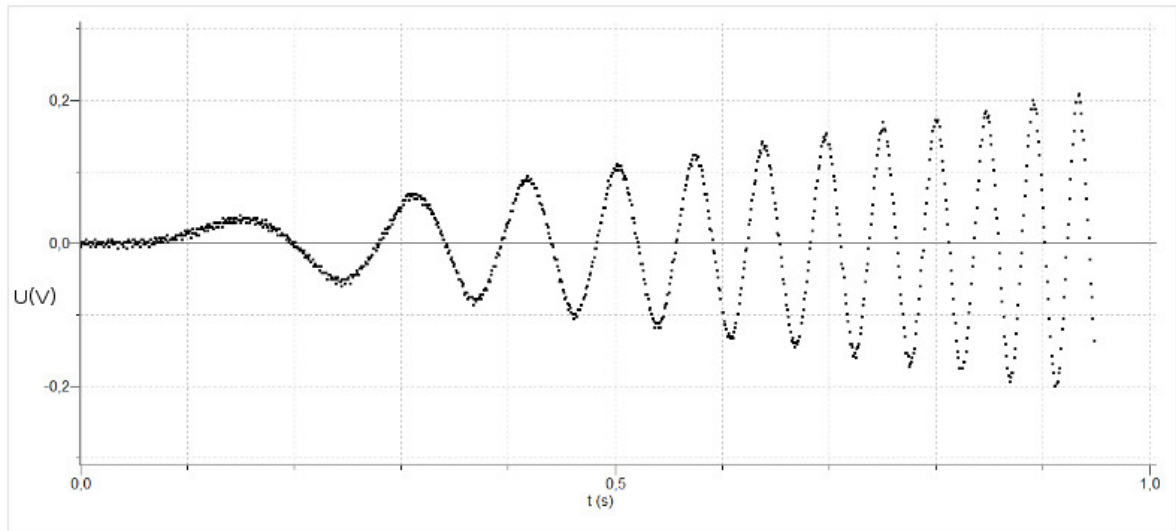


Abbildung 2

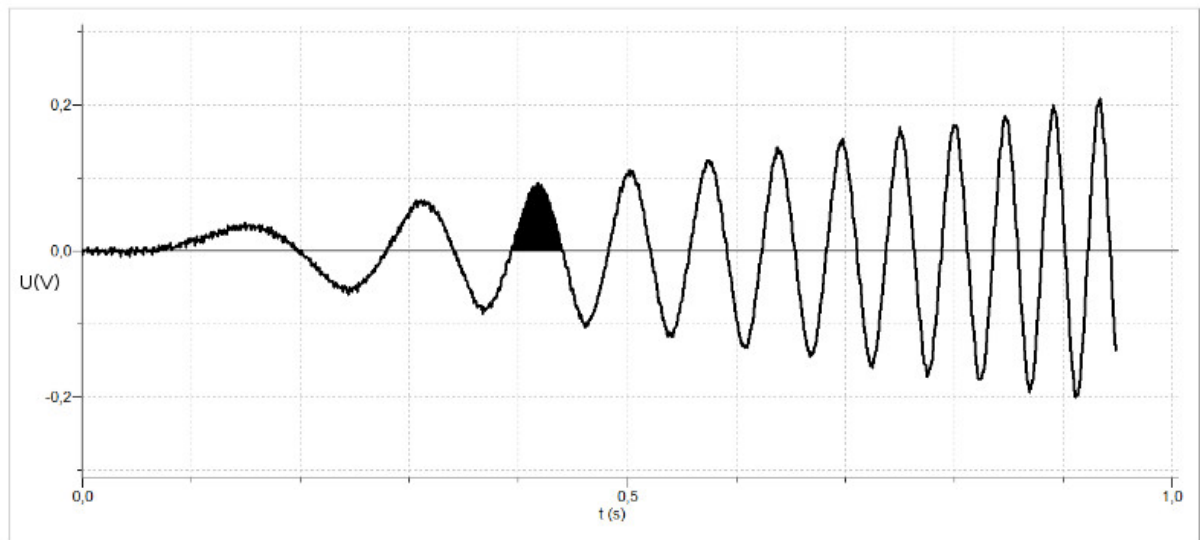
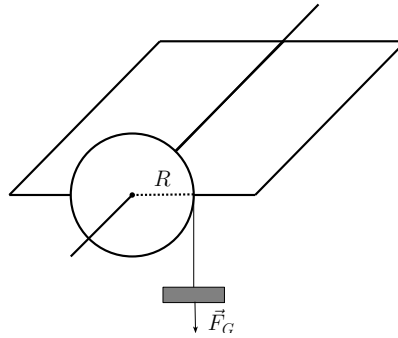


Abbildung 3

Problem 1:

1. Die Lorentzkraft erzeugt an den Enden der Spulen eine Spannung, da das Magnetfeld auf die Ladungen, die sich durch die Rotation bewegen, eine Kraft ausübt. Die frei beweglichen Ladungen im Draht (Elektronen) werden dadurch verschoben, es kommt zu einer Ladungstrennung.
Die induzierte Spannung lässt sich mit dem Induktionsgesetz von Faraday (1831) berechnen: Durch die Rotation wird der Winkel zwischen dem Magnetfeld $\vec{B}$ und der Fläche $\vec{A}$ der Spule geändert, somit ändert sich der magnetische Fluss $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = B \cdot A \cdot \cos \angle(\vec{B}; \vec{A})$. Bezeichnen wir den Winkel $\angle(\vec{B}; \vec{A})$ mit φ , dann gilt für die induzierte Spannung $U_{ind} = -N\dot{\Phi} = -NBA(\cos(\varphi)) = NBA \sin(\varphi)\dot{\varphi}$
Da sich der Winkel φ zeitlich ändert, entsteht eine Spannung.
Die Gewichtskraft beschleunigt die Masse, wodurch die Fallgeschwindigkeit zunimmt. Dadurch erhöht sich auch die Rotationsgeschwindigkeit.
Im Graphen erkennen wir das an der kleiner werdenden Rotationsdauer. Außerdem erhöht sich durch die schnellere Änderung des magnetischen Flusses Φ die Amplitude der induzierten Spannung.
2. Die Gewichtskraft der fallenden Masse übt ein Drehmoment $M = F_G \cdot R$ auf die rotierende Anordnung aus. Dieses ändert den Drehimpuls $L = J \cdot \omega$. Die prinzipielle Anordnung wird in der Zeichnung veranschaulicht.



Es gilt allgemein: $M = \dot{L} = (J \cdot \dot{\omega}) = J \cdot \dot{\omega} = J \cdot \alpha$

mit J dem Trägheitsmoment der rotierenden Anordnung, ω der Winkelgeschwindigkeit und α der Winkelbeschleunigung.

$$M = J \cdot \alpha \Rightarrow F_G \cdot R = J \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{F_G \cdot R}{J} = \text{konstant!}$$

Damit haben wir gezeigt, dass die Anordnung mit konstanter Winkelbeschleunigung rotiert.

Für die Winkelgeschwindigkeit gilt: $\dot{\omega} = \alpha \Rightarrow \omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$

Da die Spule zur Zeit $t = 0$ nicht rotiert, ist $\omega_0 = 0$ und $\omega = \alpha \cdot t$

Für den Winkel φ gilt: $\dot{\varphi} = \omega \Rightarrow \varphi = \varphi_0 + \frac{1}{2}\alpha t^2$, wie wir durch Ableiten leicht bestätigen können.

Setzen wir den Winkel zur Zeit $t = 0$ gleich 0, dann gilt:

$$\varphi = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Somit finden wir mit Hilfe des Induktionsgesetzes:

$$U_{ind} = NBA \sin(\varphi)\dot{\varphi} = NBA \sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) \alpha t$$

Die Nullstellen dieser Funktion liegen bei $\frac{1}{2}\alpha t^2 = k\pi; k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow t_k = \sqrt{\frac{2k\pi}{\alpha}}$

Der zeitliche Abstand zwischen zwei Nullstellen beträgt eine halbe Schwingungsdauer.

$$\begin{aligned} T_{k;\frac{1}{2}} &= t_{k+1} - t_k = \sqrt{\frac{2(k+1)\pi}{\alpha}} - \sqrt{\frac{2k\pi}{\alpha}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \cdot (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \cdot (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \cdot \frac{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \end{aligned}$$

Der Nenner wächst mit zunehmendem k , also nimmt die halbe Schwingungsdauer ab.

Die Amplitude der Spannung (das ist die einhüllende Funktion, da der Sinus zwischen -1 und 1 pendelt,

vergleiche die Amplitude bei der Schwebung!) ist $NBA\alpha t$. Sie wächst also proportional zur Zeit t . Beide Tatsachen stimmen mit den Messdaten überein.

3. Wir bestimmen die Maßstäbe in unserem Diagramm, um Zeiten und Spannungen ablesen zu können:
 $1\text{ s} \hat{=} \dots\text{ cm}$
 $0,1\text{ V} \hat{=} \dots\text{ cm}$

Zunächst bestimmen wir α durch die Nullstellen unserer Funktion. Für die Nullstellen gilt $\frac{1}{2}\alpha t^2 = 2\pi; k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{t^2}$. Die letzte Nullstelle liegt bei $t = 0,94\text{ s}, k = 23$ (abzählen!).
 $\Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot 23 \cdot \pi}{(0,94\text{ s})^2} = 163,6\text{ s}^{-2}$

Jetzt fehlt noch die magnetische Flussdichte B , die in der Formel für die induzierte Spannung vorkommt. Für die Extrempunkte (Punkte maximaler Elongation) gilt, dass der Sinusterm dem Betrag nach fast 1 ist.

Genauer erhalten wir die Zeiten, indem wir die Lösungen von $\dot{U}_{ind} = 0$ bestimmen:

$$\dot{U}_{ind} = NAB\alpha \left(\sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) + t\alpha t \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\alpha t\right) \right) = 0.$$

$\sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) + t\alpha t \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\alpha t\right) = 0 \Rightarrow \frac{-\sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)}{\alpha t^2} = \cos\left(\frac{1}{2}\alpha t\right)$ Für zunehmende Zeiten t strebt der Term auf der rechten Seite gegen 0, daher auch der linke Term. In unserem Beispiel befindet sich das Extremum bei $t \approx 0,93\text{ s}; \alpha = 163,6\text{ s}^{-2} \Rightarrow \frac{-\sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)}{\alpha t^2} = -0,0066 = \cos\left(\frac{1}{2}\alpha t\right)$. Falls der Cosinusterm gegen 0 strebt, strebt der Sinusterm gegen 1 (vgl. $\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}$). Bei uns hat der Sinusterm mit den angegebenen Messdaten den Wert 0,998, also fast 1. Damit ergibt sich bei den Extremstellen

$$U_{ind} = NBA \sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) \alpha t \approx NBA\alpha t$$

Wir formen auf die gesuchte magnetische Flussdichte um: $B = \frac{U_{ind}}{NA\alpha t}$ Für das letzte Maximum (hier können wir sehr genau ablesen) erhalten wir: $t = 0,93\text{ s}; U_{ind} = 0,21\text{ V}$

Eingesetzt erhalten wir $B = \frac{0,21\text{ s}}{100 \cdot 0,25\text{ m} \cdot 0,30\text{ m} \cdot 163,6\text{ s}^{-2} \cdot 0,93\text{ s}} = 1,8 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 0,18\text{ mT}$, das ist in etwa 4 Mal so stark wie das Magnetfeld in unseren Breitengraden (Äquator ca. $0,25\text{ mT}$, Pole ca. $0,7\text{ mT}$).

4. Die eingezeichnete Fläche wird durch die Spannungsfunktion und die Verbindung von zwei Nullstellen begrenzt.

Mathematisch wird die Fläche durch das folgende Integral bestimmt: $A = \int_{t_k}^{t_{k+1}} U_{ind} dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} -N\dot{\Phi} dt$ Die Definition des Integrals besagt, dass die Integration der Ableitungsfunktion die Funktion selbst ergibt.

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} -N\dot{\Phi} dt = \Phi(t_{k+1}) - \Phi(t_k)$$

Wir wissen bereits: $t_k = \sqrt{\frac{2k\pi}{\alpha}}; t_{k+1} = \sqrt{\frac{2(k+1)\pi}{\alpha}}$

$$\Phi = -NBA \cos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) \Rightarrow \Phi(t_k) = -NBA \cos\left(\frac{1}{2}\alpha \frac{2k\pi}{\alpha}\right) = -NBA \cdot \cos(k\pi)$$

In unserem Fall ist $k = 4$ und $k + 1 = 5$ (k startet bei 0). Daher gilt für die Fläche $A = \Phi(t_5) - \Phi(t_4) = -NBA \cdot \cos(5\pi) - (-NBA \cdot \cos(4\pi)) = NBA + NBA = 2NBA$

Allgemein unterscheiden sich die magnetischen Flüsse bei zwei benachbarten Nullstellen nur durch das Vorzeichen.

$$\text{Für die Fläche gilt allgemein: } A = \Phi(t_{k+1}) - \Phi(t_k) = -NBA(\cos((k+1)\pi) - \cos(k\pi)) = -NBA(-2 \sin \frac{(k+1)\pi + k\pi}{2} \sin \frac{(k+1)\pi - k\pi}{2}) = 2NBA \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2NBA \cos(k\pi)$$

Der Cosinusterm ist entweder 1 oder -1 : Für gerade k erhalten wir eine positive Fläche, für ungerade k eine negative.

Problemstellung 2

In den Jahren 1963-1964 hat der Physiker W. Bertozzi mit seinen Mitarbeitern ein Experiment am MIT in Boston durchgeführt, bei dem die Existenz einer maximalen Geschwindigkeit nachgewiesen wurde. Der Betrag dieser Geschwindigkeit war gleich der Vakuumlichtgeschwindigkeit. Nach den Gesetzen der klassischen Physik ist es möglich, einen Körper aus der Ruhe heraus auf eine beliebige Geschwindigkeit zu beschleunigen, während dies nach den Gesetzen der speziellen Relativitätstheorie nicht möglich ist.

In diesem Experiment wurden Elektronen einerseits durch geeignete elektrische Felder, die von einem van de Graaff Beschleuniger erzeugt wurden, sowie weiters durch einen Linearbeschleuniger (LINAC) beschleunigt. Die Elektronen werden von einer Heizkathode in Form von Pulsen der Länge 3 ns (3×10^{-9} s) erzeugt und dann durch die Potentialdifferenzen des van de Graaff Generators beschleunigt, die maximal 1,5 Millionen Volt betragen.

Die von der ersten Beschleunigungsstufe heraustretenden Elektronen durchlaufen ein kleines metallisches Röhrchen in A, in dem sie einen Stromimpuls auslösen, der an ein Oszilloskop geschickt wird (siehe Abb. 1 und 2). Die Strecke zwischen A und B beträgt 8,40 m und ist frei von Luft und anderen störenden elektrischen Feldern (der Linearbeschleuniger LINAC ist in der ersten Phase des Experiments - und insbesondere auch während der unten wiedergegebenen Messungen, siehe Tabelle 1 - nicht in Betrieb). In B angekommen stoßen die Elektronen auf eine Aluminiumscheibe, wo sie erneut einen Stromimpuls auslösen, welcher ebenfalls an das Oszilloskop übertragen wird. Die Distanz zwischen den beiden Impulsen auf dem Oszilloskop erlaubt die Messung der Zeit, welche von den Elektronen benötigt wurde, um die Strecke AB zurückzulegen, und damit auch ihre Geschwindigkeit.

Jede Unterteilung (div) des Gitters des Oszilloskops entspricht hierbei einer Zeit von ca. $0,98 \times 10^{-8}$ s.

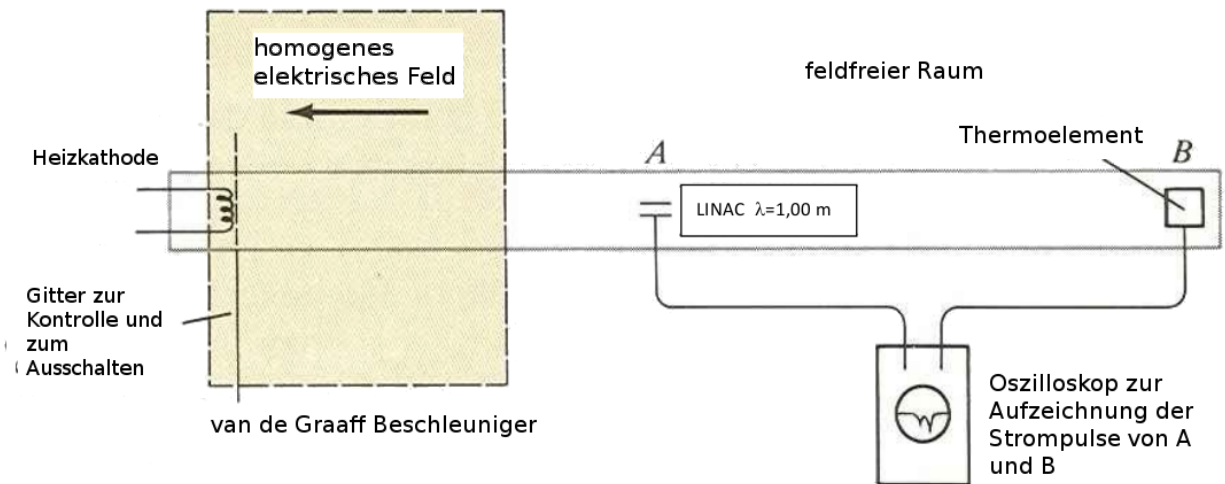


Abbildung 1: Aufbau des Experiments

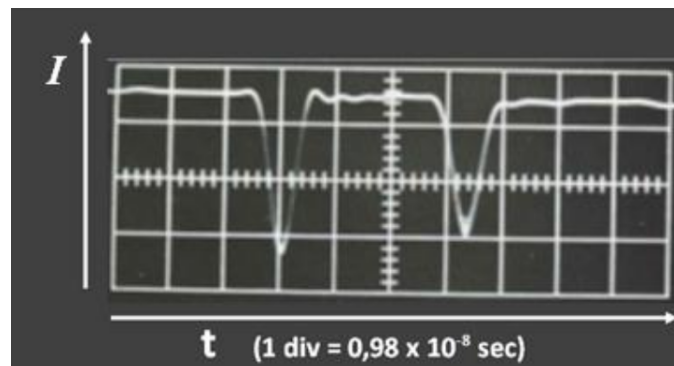


Abbildung 2: Messwerte auf dem Oszilloskop

Indem man auf vom Oszilloskop die Distanz zwischen den beiden Pulsen abliest, erhält man bei verschiedenen Beschleunigungsspannungen folgende Werte (Tabelle 1)

Potentialdifferenz (in 10^6V)	0,5	1	1,5
Anzahl der Unterteilungen (div) zwischen den Impulsen	3,30	3,10	2,95

Tabelle 1: Ergebnisse erste Phase

In einer zweiten Phase des Experiments wird - um die Energie der Elektronen noch weiter zu steigern - auch der Linearbeschleuniger LINAC verwendet; er beschleunigt auf einer Strecke von einem Meter die Elektronen durch eine zusätzliche Potentialdifferenz von 3,0 Millionen Volt.

In dieser zweiten Phase des Experiments wird mit einem Thermoelement auch die Wärme gemessen, die die Elektronen an die Scheibe B abgeben, sowie durch ein Ladungsmessgerät die auf B auftreffende Ladungsmenge. Die Ergebnisse für zwei verschiedene Gesamtpotentialdifferenzen sind in Tabelle 2 wiedergegeben.

Potentialdifferenz (in 10^6V)	1,5	4,5
Energie des Elektronenbündels (J)	10,0	29,2
Ladung des Elektronenbündels (μC)	6,1	6,1

Tabelle 2: Ergebnisse zweite Phase

Aufträge:

1. Analysiere das beschriebene Experiment und stelle in einem kartesischen Koordinatensystem den Verlauf von $\frac{v^2}{c^2}$ als Funktion von W dar, sowohl für klassisch erwartete Ergebnisse, als auch für die effektiv gemessenen. Hierbei ist v die Geschwindigkeit der Elektronen im Punkt B, c ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und W ist die Arbeit, die vom elektrischen Feld zur Beschleunigung der Elektronen aufgebracht wird.
2. Ermittle das geeignetste physikalische Modell, um die beobachtete Situation zu beschreiben, also den Verlauf von $\frac{v^2}{c^2}$ als Funktion von W .
3. Berechne die aufgrund des gewählten Modells erwarteten Werte von $\frac{v^2}{c^2}$ und vergleiche diese mit den gemessenen.
4. Weise anhand der Daten aus Tabelle 2 nach, dass die kinetische Energie der Elektronen im Punkt B ungefähr der vom Beschleuniger gelieferten Energie entspricht und rechtfertige hiermit folgende Aussage: "Der Fakt, dass die gemessene Geschwindigkeit der Elektronen kleiner ist als klassisch erwartet, liegt nicht an Energieverlusten in der Apparatur".

Lösung Problemstellung 2

- Die Analyse fällt kurz aus: Durch die elektrischen Felder werden die Elektronen beschleunigt, die Zunahme der kinetischen Energie kann direkt von den Potentialdifferenzen abgelesen werden, wenn man Energien in eV angibt.

Klassisch betrachtet ist die kinetische Energie der Elektronen gegeben durch $E_{kin} = \frac{1}{2}m_0v^2 = \frac{1}{2}m_0c^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2$. Hiermit erhält man den Ausdruck

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{2 \cdot W}{m_0c^2},$$

wobei $m_0c^2 = 0,511 \times 10^6 \text{ eV}$.

Für die gemessenen Werte berechnet man jeweils:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{8,40m}{x \cdot t_{div}}$$

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{8,40m}{x \cdot t_{div} \cdot c}\right)^2,$$

wobei x die Anzahl der Unterteilungen angibt.

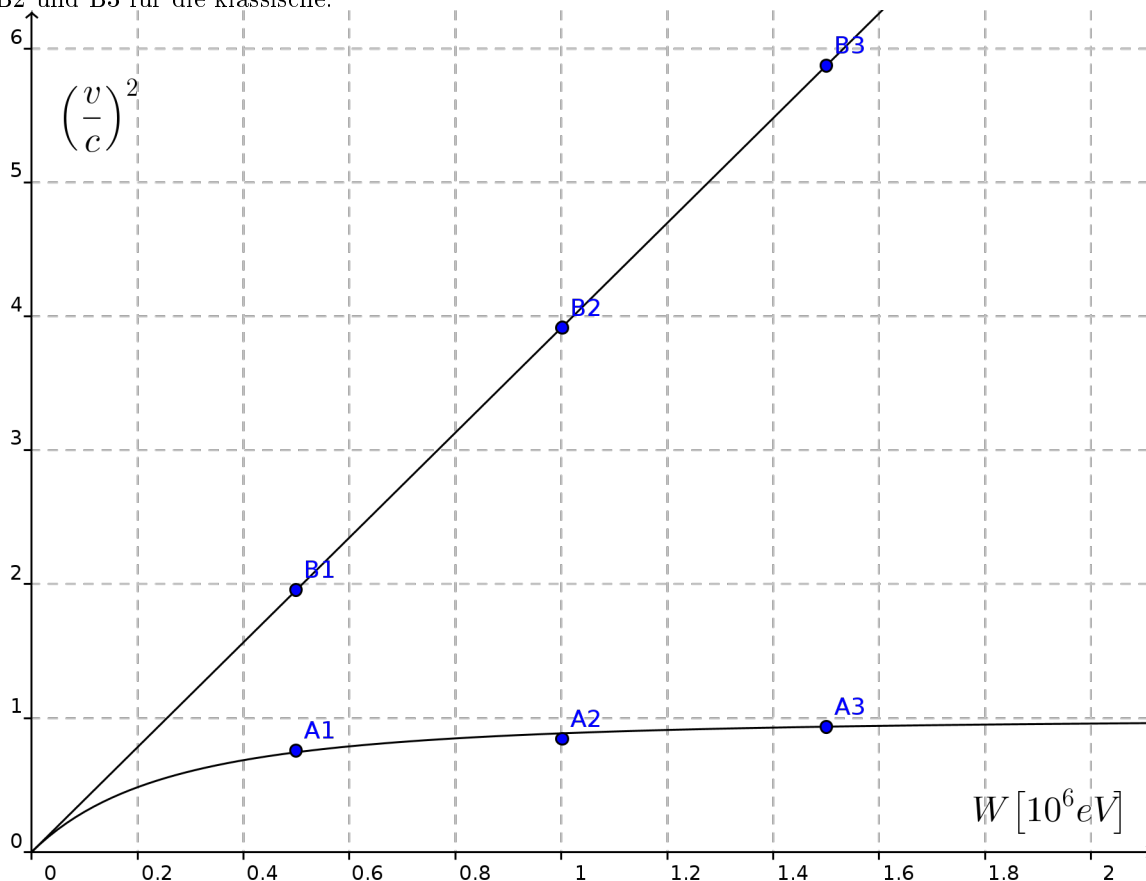
Somit erhält man folgende Tabellen:

E_{kin} bzw. W (in 10^6 V)	0,5	1	1,5
$\left(\frac{v}{c}\right)^2_{Klassisch}$	1,957	3,914	5,871

E_{kin} bzw. W (in 10^6 V)	0,5	1	1,5
$\left(\frac{v}{c}\right)^2_{Experimentell}$	0,751	0,851	0,939

Tabelle 3: Auswertung

Für die Darstellung erhält man somit die Punkte A1, A2 und A3 für die experimentelle Situation und die B1, B2 und B3 für die klassische:



2. Die korrekte, mit dem Experiment im Einklang stehende, Berechnung muss natürlich relativistisch durchgeführt werden. Hierfür benutzt man den Ausdruck für die relativistische Gesamtenergie eines Körpers der Geschwindigkeit v : $E = m(v) c^2 = E_{kin} + E_{Ruhe}$, wobei $m(v) = m_0 \gamma = m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$ die relativistische Masse bezeichnet. Damit erhält man für die kinetische Energie:

$$\begin{aligned} E_{kin} &= m_0 c^2 (\gamma - 1) \\ &= m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Eine Umformung ergibt

$$\gamma = \frac{E_{kin} + m_0 c^2}{m_0 c^2}$$

bzw.

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1 - \left(\frac{m_0 c^2}{W + m_0 c^2}\right)^2. \quad (1)$$

Diese Funktion (sowie der klassische, lineare Zusammenhang) sind bereits im Diagramm aus Teil 1 dargestellt.

3. Der Vergleich der theoretischen, mit Gleichung (1) berechneten Werte und denen aus Tabelle 3 liefert folgende Tabelle:

W (in 10^6V)	0,5	1	1,5
$\left(\frac{v}{c}\right)_{\text{Experimentell}}^2$	0,751	0,851	0,939
$\left(\frac{v}{c}\right)_{\text{relativistisch}}^2$	0,745	0,886	0,935
abs. Fehler	0,006	-0,035	0,004
rel. Fehler	0,8%	-4,0%	0,4%

Tabelle 4: Fehlerrechnung

4. Für diesen Punkt benötigt man die Umrechnung von eV in J : $1eV = 1,602 \times 10^{-19} J$. Die Gesamtenergie des Elektronenbündels ist auf $n = \frac{\text{Gesamtladung}[C]}{\text{Elementarladung}[C]}$ Elektronen aufgeteilt, weshalb die kinetische Energie pro Elektron gegeben ist durch

$$\begin{aligned} E_{kin} [eV] &= \frac{\text{Energie des Bündels} [eV]}{n} \\ &= \frac{\text{Energie des Bündels} [eV]}{1} \cdot \frac{\text{Elementarladung} [C]}{\text{Gesamtladung} [C]} \\ &= \frac{\text{Energie des Bündels} [J]}{\text{Elementarladung} [C]} \cdot \frac{\text{Elementarladung} [C]}{\text{Gesamtladung} [C]} \\ &= \frac{\text{Energie des Bündels} [J]}{\text{Gesamtladung} [C]} \end{aligned}$$

bzw.

$$E_{kin} [MeV] = \frac{\text{Energie des Bündels} [J]}{\text{Gesamtladung} [\mu C]},$$

womit man folgende Tabelle aufstellen kann.

Potentialdifferenz (in 10^6V)	1,5	4,5
Energie des Elektronenbündels (J)	10,0	29,2
Ladung des Elektronenbündels (μC)	6,1	6,1
kinetische Energie pro Elektron (MeV)	1,6	4,8

Tabelle 5: Ergebnisse zweite Phase

Auffallend ist, dass die kinetische Energie pro Elektron größer ist als die Potentialdifferenz liefern kann. Dies ist entweder auf eine bereits vorhandene Bewegungsenergie der Elektronen von der Erzeugung zurückzuführen und/oder dass das Ladungsmessgerät zu wenig Ladungen registriert. Wenn man diese Diskrepanz ignoriert, so ist doch gut ersichtlich, dass die von den Beschleunigern gelieferte Energie in Bewegungsenergie umgewandelt wurde und nicht in Verluste “geflossen” ist.