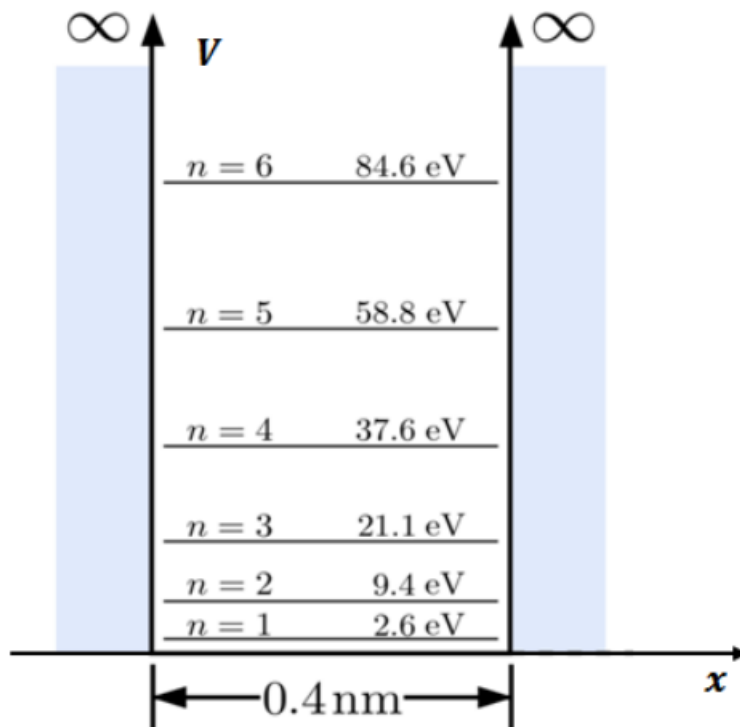


Fragestellungen

1. Ein Glühlämpchen der Leistung $P = 100\text{W}$ emittiert Licht in einer isotropen Art, sie wird im Zentrum eines kubischen Raumes der Seitenlänge $L = 7\text{m}$ platziert. Wieviel Energie erreicht in 10 Minuten die Decke des Zimmers?
2. Ein Wasserstoffatom befindet sich in einem angeregten Zustand, nachdem es ein Photon aus dem UV Bereich der Wellenlänge $\lambda = 97,2\text{nm}$ absorbiert hat. Durch verschiedene Übergänge, denen jeweils eine die Emission eines Photons bestimmter Wellenlänge zugeordnet werden kann, kann dieses Atom seinen Grundzustand erreichen. Wieviele solcher Übergänge, bei denen Photonen mit einer anderen Wellenlänge als die des absorbierten Photons emittiert werden, sind möglich? Welche dieser Übergänge verursachen Emission im sichtbaren Bereich? (Rydbergkonstante $R = 1,0974 \times 10^7\text{m}^{-1}$)
3. In der Abbildung sind die Energieniveaus eines Teilchens der Masse m , das sich in einem eindimensionalen Potentialtopf unendlicher Höhe befindet, dargestellt. Bestimme die Masse des Teilchens, indem du die Idee von de Broglie verwendest und annimmst, dass die stationäre Wellenfunktion des Teilchens an den Rändern null sein muss.



Lösung Fragestellungen

1. Da sich die Lichtquelle genau im Zentrum des Zimmers befindet, verteilt sich die Energie gleichmäßig auf alle sechs quadratischen Flächen verteilt (Hinweis: Die Verteilung der absorbierten Energie auf einer Seitenfläche ist natürlich nicht gleichmäßig!). In 10 Minuten setzt die Lichtquelle eine elektrische Energie von $W = P \cdot t = 100W \cdot 600s = 6 \times 10^4 J$ in elektromagnetische Energie um. Diese Energie wird aufgrund der Erhaltung des Energiestroms i.e. bei Vernachlässigung von Verlusten zu 1/6 von der Decke absorbiert, sie nimmt also $W_{abs} = 10000J$ auf.

Hinweis I: Ich habe dieses Ergebnis auch erhalten mittels Integration des Poynting-Vektors über die Deckenfläche erhalten, diese Art der Lösung ist aber für einen Schüler nicht machbar:

$$\begin{aligned}\vec{S} &= |\text{isotroper Strahlungsquelle}| = \frac{P}{4\pi r^2} \vec{e}_r = \frac{P}{4\pi r^3} \vec{r} \\ \vec{dA} &= dxdy \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \iint_{x,y=0}^{x,y=3,5m} \vec{S}|_{z=3,5m} \cdot \vec{dA} &= \iint_{x,y=0}^{x,y=3,5m} \frac{P}{4\pi \sqrt{(3,5m)^2 + x^2 + y^2}^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3,5m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dxdy \\ &= \frac{3,5P}{4\pi} \iint_{x,y=0}^{x,y=3,5m} \frac{dxdy}{\sqrt{(3,5m)^2 + x^2 + y^2}^3} \\ &= \frac{3,5P}{4\pi} 0,1496 \\ &= 0,042667 \cdot P\end{aligned}$$

Dies ist die absorbierte Leistung eines Viertels der Decke, durch Multiplikation mit 4 und der Zeit erhält man die absorbierte Energie

$$W_{abs} = 10000J.$$

Hinweis II: Mit der Annahme der Erhaltung der Energie kann man den Poyntingvektor auch einfacher über ein Raumwinkelelement von $4\pi/6$ im Abstand $r = 1m$ integrieren, dies liefert

$$\begin{aligned}\int_{\Omega=2\pi/3} \frac{P}{4\pi r^2} |_{r=1m} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r d\Omega &= \frac{P}{4\pi} \int_{\Omega=2\pi/3} d\Omega \\ &= \frac{P}{4\pi} \frac{2\pi}{3} \\ &= \frac{P}{6},\end{aligned}$$

ist aber von der Argumentation wohl äquivalent zur einfachen Lösungsvariante.

2. Die Absorption eines Photons der Wellenlänge 97,2 nm bedeutet mit $\Delta E = \frac{hc}{\lambda}$ eine Energieänderung von

$$\Delta E = \frac{1,986 \times 10^{-26} Nm^2}{97,2 \times 10^{-9} m} = 2,044 \times 10^{-19} J$$

bzw.

$$\Delta E = \frac{1,24 \times 10^{-6} eVm}{97,2 \times 10^{-9} m} = 12,757 eV.$$

Das Wasserstoffatom befindet sich nach der Absorption also im Zustand der Energie

$$\begin{aligned}E &= -13,605 eV + 12,757 eV \\ &= -0,848 eV,\end{aligned}$$

was nach der Formel $E_n = -13,605\text{eV}/n^2$ einer Quantenzahl von $n = 4$ entspricht.

Dieses Ergebnis kann natürlich auch gleich mit der Rydbergformel (für $\lambda = 97,2\text{nm}$ und $n_1 = 1 < n_2$) erhalten werden:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda} &= R \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \\ \frac{1}{n_2^2} &= 1 - \frac{1}{R\lambda} = 1 - \frac{1}{R\lambda} = 0,0625 \\ n_2 &= 3,99 \approx 4.\end{aligned}$$

Mögliche Übergänge in den Grundzustand sind (die Wellenlängen werden mit der Rydbergformel bestimmt):

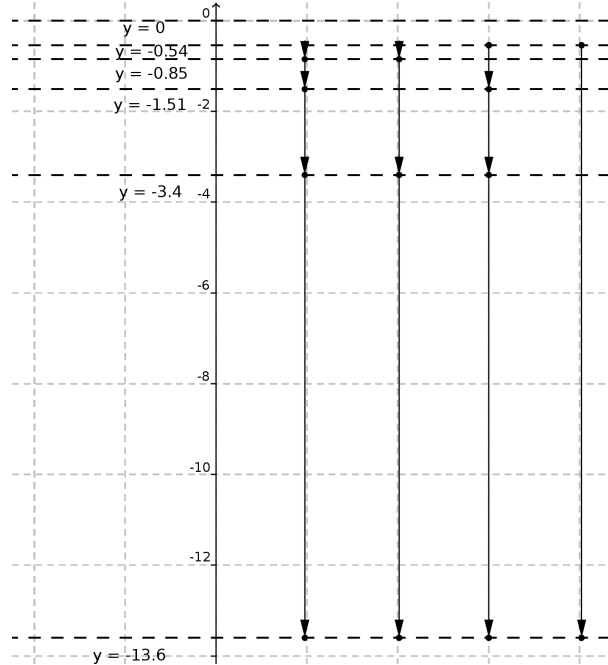


Abbildung 1: Die möglichen Übergänge von $n = 4$ zu $n = 1$

- (a) $4 \rightarrow 1$: Einphotonenübergang $\lambda_{41} = 97,2\text{nm}$, dies ist die Umkehrung der ursprünglichen Absorption
- (b) $4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$: Dreiphotonenübergang $\lambda_{43} = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16} \right)^{-1} = 1874\text{nm}$; $\lambda_{32} = 656\text{nm}$; $\lambda_{21} = 121\text{nm}$
- (c) $4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$: Zweiphotonenübergang $\lambda_{43} = 1874\text{nm}$; $\lambda_{31} = 102\text{nm}$
- (d) $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$: Zweiphotonenübergang $\lambda_{42} = 486\text{nm}$; $\lambda_{21} = 121\text{nm}$

Sichtbares Licht entspricht Wellenlängen von 380nm bis 780nm , also liegen nur die Übergänge λ_{32} und λ_{42} in diesem Bereich.

3. Nach de Broglie kann jedem Teilchen mit der Masse m und dem Impuls p eine Wellenlänge zugeordnet werden (Materiewelle), $\lambda = \frac{h}{p}$. Mit der klassischen Energie-Impuls Relation $E_{kin} = p^2/(2m)$ kann man dies schreiben als

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_{kin}}}.$$

Die gegebenen Energien im Diagramm entsprechen bereits den kinetischen Energien, da $E_{pot} = 0$ im Inneren des Potentialtopfes. Die Forderung stehender (Materie-)Wellen liefert die Bedingung.

$$l = n \cdot \frac{\lambda_n}{2}.$$

Durch Kombinieren dieser beiden Gleichungen erhält man also

$$\begin{aligned} m &= \frac{h^2}{2 \cdot (\lambda_n)^2 \cdot E_n} = \frac{h^2 n^2}{8 \cdot l^2 \cdot E_n} = 1,33 \times 10^{-11} \frac{(eVs)^2}{m^2} \frac{n^2}{E_n} \\ &= 1,2 \frac{MeV}{c^2} \frac{n^2}{E_n/eV} \end{aligned}$$

Einsetzen der gegebenen Werte liefert dann die Werte aus Tabelle 1.

n	$E_n [eV]$	$m [MeV/c^2]$
1	2,6	0,461
2	9,4	0,511
3	21,1	0,512
4	37,6	0,511
5	58,8	0,510
6	84,6	0,511

Tabelle 1: berechnete Massen

Das arithmetische Mittel der Ergebnisse liefert dann

$$\bar{m} = 0,503 \frac{MeV}{c^2} = 0,503 \cdot 1,783 \times 10^{-30} kg = 8,96 \times 10^{-31} kg,$$

was ungefähr der Masse eines Elektrons entspricht. Hinweis: Vernachlässigt man den Ausreisser, so erhält man den exakten Wert von $0,511 \frac{MeV}{c^2}$.

Frage 2

Ein Elektron und ein Positron (das Antiteilchen des Elektrons mit gleicher Masse und entgegengesetzter Ladung), bewegen sich mit der gleichen Geschwindigkeit aufeinander zu. Beide Teilchen besitzen eine Gesamtenergie von $1,51 \text{ MeV}$. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Positrons im Bezugssystem des Elektrons bei Kenntnis der Ruhemasse des Elektrons von $0,511 \frac{\text{MeV}}{c^2}$?

Lösung:

Zuerst ist die Geschwindigkeit im Laborsystem zu bestimmen. Im Folgenden ist $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ der *Lorentzfaktor* und $\beta = \frac{v}{c}$ die *Relativgeschwindigkeit*. Ausgehend von der *Äquivalenz von Masse und Energie*:

$$E = \underbrace{\gamma \cdot m_0}_{m} \cdot c^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{E}{m_0 \cdot c^2} = \frac{1,51 \text{ MeV}}{0,511 \frac{\text{MeV}}{c^2} \cdot c^2} = 2,955$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0,941$$

$m = \gamma \cdot m_0$ ist die relativistische Masse.

Nebenbemerkung: Bei der Bestimmung der Positronengeschwindigkeit bzgl. im *Elektronensystem* handelt es sich um ein Beispiel für eine *relativistische Geschwindigkeitsaddition*. Diese erfolgt über folgende Formel:

$$v = \frac{u + v'}{1 + \frac{u \cdot v'}{c^2}}$$

Dabei bewegt sich ein Bezugssystem mit der Geschwindigkeit u bzgl. des Laborsystems. Im bewegten System (bzw. bzgl. des bewegten Systems) bewegt sich ein Objekt mit der Geschwindigkeit v' . v ist dann die Geschwindigkeit des Objektes bzgl. des Laborsystems.

Fortsetzung der Lösung: In unserem Beispiel ist das Elektron das bewegte System (bzw. das Elektron ruht im bewegten System) von dem man $u = 0,941 \cdot c$ kennt, das Positron ist das bewegte Objekt von dem wir $v = -0,941 \cdot c$, also die Geschwindigkeit bzgl. des Laborsystems "bereits" kennen. Da wir die Geschwindigkeit des Positrons bzgl. des vom Elektron mitbewegten Systems suchen, muss die Formel für die Geschwindigkeitsaddition auf v' umgestellt werden (hier ohne Teilschritte):

$$v = \frac{u + v'}{1 + \frac{u \cdot v'}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{v - u}{1 - \frac{u \cdot v}{c^2}} = \frac{-0,941 \cdot c - 0,941 \cdot c}{1 - \frac{-0,941 \cdot 0,941 \cdot c^2}{c^2}} = -0,997 \cdot c$$

Als Geschwindigkeit ergibt sich somit $-0,997 \cdot c = -2,9925 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, also auf das Elektron zu.

Frage 4

Eine vereinfachte Empfangsantenne besteht aus einer Kupferwicklung mit quadratischer Form. Eine Seite der Wicklung hat die Länge 20 cm und seine Enden sind mit einem Voltmeter verbunden. Dieses ist so eingestellt, dass es in der Lage ist den Effektivwert der induzierten Spannung an den Enden der Kupferwicklung zu messen, also

$$U_{eff} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$$

wobei $\hat{U}$ der Scheitelwert der Wechselspannung ist.

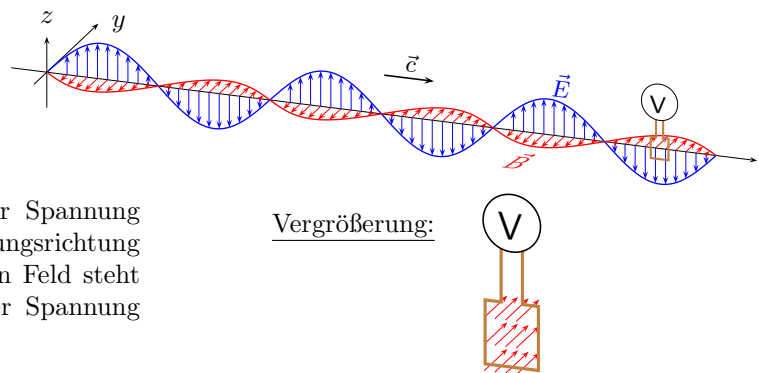
Die Empfangsantenne ist in 100 Metern Entfernung eines Funkgerätes positioniert. Letzteres ist von einem, von Amateurfunkern üblicherweise benutzten Typ.

Dieses Funkgerät sendet mit einer Frequenz von 27 MHz . Das Gesetz schreibt vor, mit Leistungen nicht über 4 W zu senden, um den Empfang von Rundfunk und Fernseher nicht zu stören.

Manchmal mißachten Amateurfunker diesen Grenzwert und senden mit Leistungen bis zu 200 W . Es soll untersucht werden, ob das zu überprüfende Funkgerät die gesetzlichen Grenzwerte für die Leistung respektiert.

Unser Voltmeter misst das Maximum der Spannung wenn die Wicklung parallel zur Ausbreitungsrichtung der Welle und senkrecht zum magnetischen Feld steht (siehe Abbildung). Der Effektivwert dieser Spannung beträgt $12,5\text{ mV}$

Welche Leistung wird vom Funkgerät abgestrahlt?



Lösung:

Normalerweise würde man nun versuchen einen Ausdruck für den Fluss $\Phi(t)$ zu erhalten. Hier empfiehlt es sich aber zuerst die Länge der Wicklung mit der Wellenlänge der **EM**-Welle zu vergleichen. Ist die Wellenlänge sehr viel größer als die Länge der Wicklung, dann ist die Flussdichte innerhalb der Wicklung näherungsweise räumlich konstant/homogen (natürlich aber noch zeitlich veränderlich). Dies ist mit der Vergrößerung in obiger Abbildung verdeutlicht worden.

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}{27 \cdot 10^6 \frac{1}{s}} = 11,11 \text{ m} \quad \text{vs. } 0,2 \text{ m}, \text{ die Näherung ist somit sinnvoll.}$$

Für diesen Fall gilt dann für die Flussdichte eine einfache zeitliche Abhängigkeit und somit auch ein einfacher Ausdruck für den magnetischen Fluss und die gemessene Induktionsspannung:

$$B(t) = \hat{B} \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad \Rightarrow \quad \Phi(t) = A \cdot \hat{B} \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad \Rightarrow \quad U_{ind}(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{d(A \cdot \hat{B} \cdot \sin(\omega \cdot t))}{dt}$$

Führt man die Ableitung durch und stellt den ganzen Ausdruck auf $\hat{B}$ um so erhält man:

$$U_{ind}(t) = -\overbrace{A \cdot \hat{B} \cdot \omega}^{\hat{U} = \sqrt{2} \cdot U_{eff}} \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad \Rightarrow \quad \hat{B} = \frac{\sqrt{2} \cdot U_{eff}}{A \cdot \omega} = \frac{\sqrt{2} \cdot 12,5 \cdot 10^{-3} \text{ V}}{(0,2 \text{ m})^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 27 \cdot 10^6 \frac{1}{s}} = 2,61 \text{ nT}$$

Für die, von einer **EM**-Welle transportierte Leistung pro Fläche (somit die **Intensität**) gilt die Beziehung:

$$I(t) = c \cdot \epsilon_0 \cdot E(t)^2 \quad \text{oder} \quad I(t) = \frac{c}{\mu_0} \cdot B(t)^2 \quad \text{mit der Einheit} \quad \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

Für das Feld wird $B(t) = \hat{B} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ in obige Formel eingesetzt (vgl. Wechselstrom, Akustik usw.).

$$I(t) = \frac{c}{\mu_0} (\hat{B} \cdot \sin(\omega \cdot t))^2 \quad \rightarrow \quad \bar{I} = \frac{1}{T} \cdot \int_t^{t+T} \frac{c}{\mu_0} \cdot \hat{B}^2 \cdot (\sin(2\pi \cdot \frac{t}{T}))^2 dt = \frac{c}{2 \cdot \mu_0} \cdot \hat{B}^2$$

$$\bar{I} = \frac{c}{2 \cdot \mu_0} \cdot \hat{B}^2 = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}} \cdot (2,61 \text{ nT})^2 = 8,14 \cdot 10^{-4} \frac{W}{m^2}$$

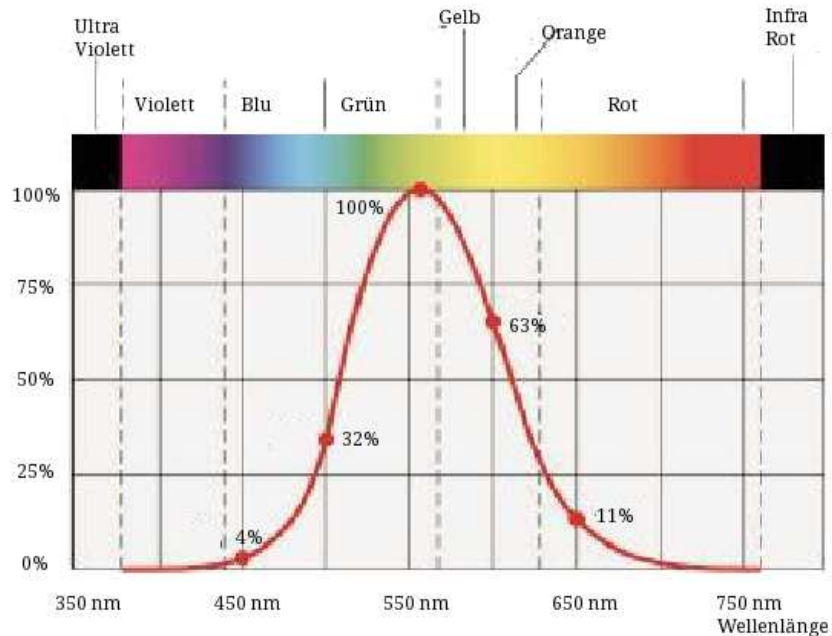
Geht man von einer in alle Raumrichtungen gleichmäßigen Abstrahlung aus (isotrop), dann erhält man die gesamte abgestrahlte Leistung, indem man die Intensität mit der Oberfläche der Kugel mit dem Radius 100 m multipliziert.

$$\bar{P} = I_{eff} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 8,14 \frac{W}{m^2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 100^2 \text{ m}^2 = 101,8 \text{ W}$$

Auch wenn das Funkgerät seine Leistung nur über die obere Halbkugel abstrahlt (oberhalb des Erdrachs), so sind dies immer noch über 50 W, also weit mehr als die gesetzlich zulässige Leistung.

Frage 6

Die folgende Abbildung zeigt die Abhängigkeit der relativen (prozentuellen) Sensibilität unseres Auges in Abhängigkeit der Wellenlänge im sichtbaren Bereich. Das Maximum der Sensibilität (mit 100 %) befindet sich bei $\lambda = 555 \text{ nm}$.



Quelle: <http://www.progettazioneottica.it/unita-fotometriche-lumen-candele-lux/1172>

Anmerkung: Die absolute Sensibilität unserer Augen für eine spezielle Wellenlänge ist definiert als das Verhältnis der Energie die von der Netzhaut an das Gehirn gesendet wird (z.B. in Form elektrischer Energie) und der Energie der elektromagnetischen Welle die auf die Netzhaut trifft. Die relative (prozentuelle) Sensibilität für eine bestimmte Wellenlänge ist definiert als das Verhältnis der absoluten Sensibilität einer bestimmten Wellenlänge zur absoluten Sensibilität bei einer Wellenlänge von $\lambda = 555 \text{ nm}$ (in Prozent).

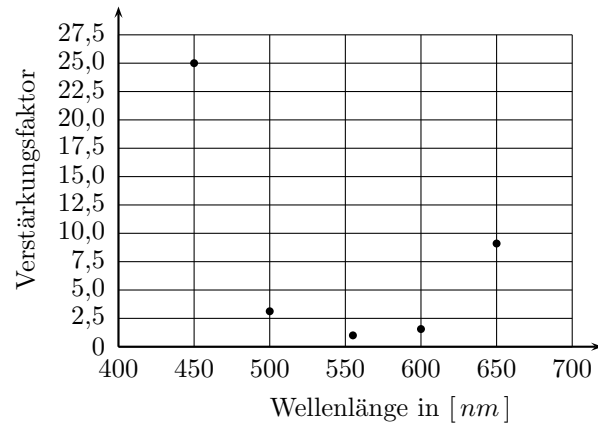
Erstelle mit Hilfe der im Diagramm enthaltenen Daten (verwende nur jene Wellenlänge für welche die Werte der relativen Sensibilität als Zahl angegeben sind) ein weiteres Diagramm, welches angibt, um wieviel die Intensität der einfallenden Strahlung bei einer bestimmten Wellenlänge erhöht werden muss, damit für jede Wellenlänge die gleiche Energie an das Gehirn gesendet wird (für die maximale relative Sensibilität wird der Wert mit 1 angegeben).

Berechne außerdem wieviele Photonen bei einer Wellenlänge von $\lambda = 650 \text{ nm}$ die Netzhaut erreichen müssen, um an das Gehirn die gleiche Energiemenge zu senden wie beim Eintreffen von 1000 Photonen mit einer Wellenlänge von 555 nm .

Lösung:

Folgendes Diagramm beinhaltet die notwendige Intensitätserhöhung und ist als Kehrwert der relativen Sensibilität aus dem ersten Diagramm berechnet worden.

Wellenlänge [nm]	Relative Sensibilität	Intensitäts- erhöhung
450	0,04	25
500	0,32	3,125
555	1	1
600	0,63	1,558
650	0,11	9,1



Die Energie eines Photons und damit auch die Energie von N Photon ist bestimmt durch die Frequenz:

$$E_{\text{Photon}} = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} \quad \longrightarrow \quad E_{N, \text{Photonen}} = N \cdot E_{\text{Photon}}$$

Soll mit Photonen der Wellenlänge 650 nm die selbe Energie wie mit 1000 Photonen der Wellenlänge 555 nm übertrage werden ist eine höhere Photonenanzahl nötig:

$$E_{N_1, Ph, \lambda_1} = E_{N_2, Ph, \lambda_2} \quad \Rightarrow \quad N_1 \cdot h \cdot \frac{c}{\lambda_1} = N_2 \cdot h \cdot \frac{c}{\lambda_2} \quad \Rightarrow \quad N_2 = N_1 \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1000 \cdot \frac{650 \text{ nm}}{555 \text{ nm}} = 1171$$

Da die Netzhaut für Photonen mit der Wellenlänge 650 nm eine geringere relative Sensibilität hat, ist nochmal eine "Erhöhung" der Photonenanzahl um den Faktor 9,1 notwendig.

$$N = 9,1 \cdot N_1 = 1,07 \cdot 10^4$$